Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

II

ФИЗМАТГИЗ • 1960

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ II

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для механико-математических и физико-математических факультетов государственных университетов и учебного пособия для физико-математических факультетов педагогических институтов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 7. Приближенные вычисления с помощью рядов

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Равномерная сходимость

§ 2. Функциональные свойства суммы ряда

§ 3. Степенные ряды и ряды многочленов

§ 4. Очерк истории рядов

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

§ 2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 2. Формула Остроградского

§ 3. Замена переменных в тройных интегралах

§ 4. Элементы теории поля

§ 5. Многократные интегралы

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

§ 2. Разложение функций в ряд Фурье

§ 3. Интеграл Фурье

§ 4. Замкнутость и полнота тригонометрической системы функций

ГЛАВА ПЯТНАДЦАТАЯ

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

234. Основные понятия. Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \tag{1}$$

Составленный из этих чисел символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

называется бесконечным рядом (или — просто — рядом), а сами числа (1) — членами ряда. Вместо (2), пользуясь знаком суммы, часто пишут так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{2a}$$

указатель n пробегает здесь все значения от 1 до ∞ *).

Станем последовательно складывать члены ряда, составляя (в бесконечном количестве) суммы:

$$\left.\begin{aligned} A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ \ldots,\ A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

их называют частичными суммами или отрезками ряда. Эту последовательность частичных сумм $\{A_n\}$ мы всегда будем сопоставлять с рядом (2): роль этого символа и заключается в порождении упомянутой последовательности.

Конечный или бесконечный предел A частичной суммы A_n ряда (2) *при* $n \to \infty$:

$$A = \lim A_n,$$

*) Впрочем, нумерацию членов ряда иногда бывает удобнее начинать не с единицы, а с нуля или же с какого-либо натурального числа, большего единицы.

называют суммой ряда и пишут

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

придавая тем самым символу (2) или (2а) числовой смысл. *Если ряд имеет конечную сумму, его называют сходящимся, в противном же случае (т. е. если сумма равна $\pm\infty$, либо же суммы вовсе нет) — расходящимся.*

Таким образом, вопрос о сходимости ряда (2), по определению, равносилен вопросу о существовании конечного предела для последовательности (3). Обратно, какую бы последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

наперед ни взять, вопрос о наличии для нее конечного предела может быть сведен к вопросу о сходимости ряда

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots, \tag{4}$$

для которого частичными суммами как раз и будут члены этой последовательности. При этом сумма ряда совпадает с пределом последовательности.

Иными словами, рассмотрение бесконечного ряда и его суммы есть просто новая форма изучения последовательности и ее предела. Но эта форма, как читатель увидит из дальнейшего изложения, представляет неоценимые преимущества как при установлении самого существования предела, так и при его вычислении. Это обстоятельство делает бесконечные ряды важнейшим орудием исследования в математическом анализе и его приложениях.

Примеры. 1) Простейший пример бесконечного ряда получаем, суммируя (уже знакомую читателю) геометрическую прогрессию:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

Его частичная сумма будет (если $q \neq 1$)

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Если знаменатель прогрессии, q, по абсолютной величине меньше единицы, то [как мы уже знаем, n° 30, 6)] s_n имеет конечный предел

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

т. е. наш ряд сходится, и s будет его суммой.

При $|q| \geqslant 1$ та же прогрессия дает пример расходящегося ряда. Если $q \geqslant 1$, то его суммой будет $+\infty$ или $-\infty$ (смотря по знаку a); в прочих случаях суммы вовсе нет. Отметим любопытный ряд, который получается

при $a=1$, $q=-1$:

$$1-1+1-1+\ldots\equiv 1+(-1)+1+(-1)+\ldots\text{*)}$$

Его частичные суммы попеременно равны то 1, то 0.

2) Легко установить расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

В самом деле, так как члены его убывают, то его n-я частичная сумма

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

и растет до бесконечности вместе с n.

3) Наконец, менее тривиальный пример нам доставит переменная

$$y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!},$$

про которую в п° 49 мы показали, что она стремится к числу e. Это равносильно утверждению, что e является суммой бесконечного ряда:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Вспоминая приближенное вычисление числа e в п° 49, читатель на этом примере сможет оценить выгоду последовательного введения все менее и менее значительных поправок, постепенно улучшающих получаемые в виде частичных сумм приближенные значения e.

235. Простейшие теоремы. Если в ряде (2) отбросить первые m членов, то получится ряд:

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}+\ldots=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n,\tag{5}$$

называемый остатком ряда (2) после m-го члена.

1°. *Если сходится ряд* (2), *то сходится и любой из его остатков* (5); *обратно, из сходимости остатка* (5) *вытекает сходимость исходного ряда* (2).

Фиксируем m и обозначим k-ю частичную сумму ряда (5) через A'_k:

$$A'_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}.$$

Тогда, очевидно,

$$A'_k=A_{m+k}-A_m.\tag{6}$$

Если ряд (2) сходится, так что $A_n\to A$, то — при безграничном возрастании k — существует конечный предел

$$A'=A-A_m\tag{7}$$

и для суммы A'_k, что и означает сходимость ряда (5).

---

*) Если какой-либо член a ряда оказывается отрицательным числом: $a=-b$ (где $b>0$), то вместо $\ldots+(-b)+\ldots$ пишут $\ldots-b+\ldots$. Подчеркнем, что членом ряда здесь будет все же $-b$, а не b.

Обратно, если дано, что сходится ряд (5), так что $A'_k \to A'$, то перепишем равенство (6), полагая в нем $k = n - m$ (при $n > m$), так:

$$A_n = A_m + A'_{n-m};$$

отсюда можно усмотреть, что — при безграничном возрастании n — частичная сумма A_n имеет предел

$$A = A_m + A', \tag{8}$$

т. е. сходится ряд (2).

Иными словами, *отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда* (в смысле его сходимости или расходимости).

Сумму ряда (5), если он сходится, обозначим вместо A' символом α_m, указывая значком, после какого члена берется остаток. Тогда формулы (8) и (7) перепишутся следующим образом:

$$A = A_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m. \tag{9}$$

Если увеличивать m до бесконечности, то $A_m \to A$ и $\alpha_m \to 0$. Итак:

2°. *Если ряд* (2) *сходится, то сумма α_m его остатка после m-го члена с возрастанием m стремится к нулю.*

Упомянем следующие простые свойства сходящихся рядов:

3°. *Если члены сходящегося ряда* (2) *умножить на один и тот же множитель c, то его сходимость не нарушится, а сумма лишь умножится на c.*

В самом деле, частичная сумма $\bar{A}_n$ ряда

$$ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots,$$

очевидно, равна

$$\bar{A}_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cA_n$$

и имеет пределом cA.

4°. *Два сходящихся ряда*

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

и

$$B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

можно почленно складывать или вычитать, так что ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$$

также сходится, и его сумма равна, соответственно, $A \pm B$.

Если A_n, B_n и C_n означают частичные суммы упомянутых рядов, то, очевидно,

$$C_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = A_n \pm B_n.$$

Переходя к пределу, найдем, что

$$\lim C_n = \lim A_n \pm \lim B_n,$$

что и доказывает наше утверждение.

В заключение сделаем еще одно замечание.

5°. *Общий член a_n сходящегося ряда стремится к нулю.* Это может быть доказано совершенно элементарно: раз A_n (а с ним и A_{n-1}) имеет конечный предел A, то

$$a_n = A_n - A_{n-1} \to 0.$$

В предыдущем утверждении содержится *необходимое условие для сходимости ряда*, которым мы будем часто пользоваться. При нарушении его ряд заведомо расходится. Однако важно подчеркнуть, что это условие не является само по себе достаточным для сходимости ряда. Иными словами, даже при выполнении его ряд может расходиться. Примером этого служит ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

рассмотренный выше [n° **234**, 2)]; многочисленные другие примеры этого же рода читатель найдет в последующем.

§ 2. СХОДИМОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

236. Условие сходимости положительного ряда. Займемся теперь вопросом об установлении сходимости или расходимости ряда. Этот вопрос всего проще решается для рядов, члены которых неотрицательны; для краткости такие ряды мы будем называть просто положительными.

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \text{(A)}$$

будет положительным, т. е. $a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Тогда, очевидно,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n,$$

т. е. переменная A_n оказывается возрастающей. Вспоминая теорему о пределе монотонной переменной [n° **44**], мы непосредственно приходим к следующему основному в теории положительных рядов предложению:

Теорема. *Положительный ряд* (A) *всегда имеет сумму; эта сумма будет конечной (и, следовательно, ряд — сходящимся), если*

частичные суммы ряда ограничены сверху, и бесконечной (а ряд — расходящимся) в противном случае.

Все практические признаки сходимости и расходимости положительных рядов, в конечном счете, основаны на этой простой теореме. Но непосредственное ее применение лишь в редких случаях позволяет судить о характере ряда. Приведем примеры этого рода.

1) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

известный под именем гармонического ряда*).

Имеем очевидное неравенство:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Если все члены гармонического ряда, начиная со второго, последовательно разбить на группы по 2, 4, 8, ... членов в каждой:

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{2};\quad \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{2^2};\quad \underbrace{\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{15}}_{2^3};\ \ldots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1}}_{2^{k-1}};\ \ldots,$$

то каждая из этих сумм в отдельности будет больше $\frac{1}{2}$; в этом легко убедиться, полагая в (1) поочередно $n = 2, 4, 8, \ldots, 2^{k-1}, \ldots$ Обозначим n-ю частичную сумму гармонического ряда через H_n; тогда, очевидно,

$$H_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}.$$

Мы видим, что частичные суммы не могут быть ограничены сверху: ряд имеет бесконечную сумму.

Упомянем уже здесь, что H_n с возрастанием n возрастает очень медленно. Эйлер, например, вычислил, что

$$H_{1000} = 7{,}48\ldots,\quad H_{1\,000\,000} = 14{,}39\ldots \text{ и т. д.}$$

Впоследствии мы будем иметь случай точнее охарактеризовать возрастание сумм H_n [n° 238, 4)].

2) Рассмотрим теперь более общий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots,$$

---

*) Каждый член его, начиная со второго, представляет собой среднее гармоническое двух соседних членов. Число c называется средним гармоническим чисел a и b, если

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

где s — любое вещественное число; он содержит в себе, как частный случай (при $s=1$), предыдущий ряд. По сходству с рядом (1), и этот ряд тоже называют гармоническим.

Так как при $s<1$ члены рассматриваемого ряда больше соответствующих членов ряда (1), то, в этом предположении, частичные суммы и подавно не ограничены сверху, так что ряд расходится.

Займемся случаем, когда $s>1$; положим для удобства $s=1+\sigma$, где $\sigma>0$. Аналогично (1), имеем на этот раз:

$$\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^s}<n\cdot\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^\sigma}. \qquad (2)$$

Выделяя, как и выше, последовательные группы членов:

$$\underbrace{\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}}_{2};\quad \underbrace{\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}}_{2^2};\quad \underbrace{\frac{1}{8^s}+\ldots+\frac{1}{15^s}}_{2^3};\ \ldots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2^{k-1})^s}+\ldots+\frac{1}{(2^k-1)^s}}_{2^{k-1}};\ \ldots,$$

с помощью (2) легко показать, что эти суммы соответственно меньше членов прогрессии

$$\frac{1}{2^\sigma},\ \frac{1}{4^\sigma}=\frac{1}{2^{2\sigma}},\ \frac{1}{8^\sigma}=\frac{1}{2^{3\sigma}},\ \ldots,\ \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma}=\frac{1}{2^{(k-1)\sigma}},\ \ldots$$

В таком случае ясно, что какую бы частичную сумму рассматриваемого ряда ни взять, она будет меньше постоянного числа

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^\sigma}},$$

следовательно, ряд сходится.

237. Теоремы сравнения рядов. Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся или расходящимся. В основе такого сравнения лежит следующая простая теорема.

Теорема 1. *Пусть даны два положительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots \qquad (A)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \qquad (B)$$

Если, хотя бы начиная с некоторого места (скажем, для $n>N$), *выполняется неравенство:* $a_n\leqslant b_n$, *то из сходимости ряда* (B) *вытекает сходимость ряда* (A) *или — что то же — из расходимости ряда* (A) *следует расходимость ряда* (B).

Доказательство. На основании того, что отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не отражается на его поведении [n° **235**, 1°], мы можем считать, не нарушая общности, что $a_n \leqslant b_n$ при всех значениях $n = 1, 2, 3, \ldots$ Обозначив частичные суммы рядов (A) и (B), соответственно, через A_n и B_n, будем иметь:

$$A_n \leqslant B_n.$$

Пусть ряд (B) сходится; тогда, по основной теореме [n° **236**], суммы B_n ограничены:

$$B_n \leqslant L \quad (L = \text{const}; \ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

В силу предыдущего неравенства, и подавно

$$A_n \leqslant L,$$

а это, по той же теореме, влечет за собой сходимость ряда (A).

Иногда на практике более удобна следующая теорема, вытекающая из первой:

Теорема 2. *Если существует предел*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K^{*)} \quad (0 \leqslant K \leqslant \infty),$$

то из сходимости ряда (B), *при* $K < \infty$, *вытекает сходимость ряда* (A), *а из расходимости первого ряда, при* $K > 0$, *вытекает расходимость второго.* [Таким образом, при $0 < K < \infty$ оба ряда сходятся или оба расходятся одновременно.]

Доказательство. Пусть ряд (B) сходится и $K < \infty$. Взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, по самому определению предела, для достаточно больших n будем иметь

$$\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \quad \text{откуда} \quad a_n < (K + \varepsilon)\, b_n.$$

В силу n° **235**, 3°, одновременно с рядом (B) будет сходиться и ряд $\sum (K + \varepsilon)\, b_n$, полученный умножением его членов на постоянное число $K + \varepsilon$. Отсюда, по предыдущей теореме, вытекает сходимость ряда (A).

Если же ряд (B) расходится и $K > 0$, то в этом случае обратное отношение $\frac{b_n}{a_n}$ имеет конечный предел; ряд (A) должен быть расходящимся, ибо, если бы он сходился, то, по доказанному, сходился бы и ряд (B).

Наконец, приведем еще одну теорему сравнения, также представляющую собой следствие первой.

---

*) Мы предполагаем при этом, что $b_n \neq 0$.

Теорема 3. *Если, хотя бы начиная с некоторого места (скажем, для $n>N$), выполняется неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}\ ^{*)}, \tag{3}$$

то из сходимости ряда (B) *вытекает сходимость ряда* (A) *или — что то же — из расходимости ряда* (A) *вытекает расходимость ряда* (B).

Доказательство. Как и выше, при доказательстве теоремы 1, не умаляя общности, можно считать, что неравенство (3) справедливо для всех значений $n=1, 2, 3, \ldots$ В таком случае будем иметь:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим:

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1} \quad \text{или} \quad a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Пусть ряд (B) сходится; вместе с ним сходится ряд $\sum \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$, полученный умножением его членов на постоянный множитель $\frac{a_1}{b_1}$. А тогда, по теореме 1, сходится и ряд (A), что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к примерам установления сходимости или расходимости рядов непосредственным применением теорем сравнения.

238. Примеры. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ сходится, так как

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n \cdot (2n-1)!!} < \frac{1}{2^n}$$

(теорема 1).

2) Сравнение с гармоническими рядами [n° **236**] позволяет установить поведение многих рядов. По теореме 1:

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ сходится: $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$;

(б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p>0)$ расходится: $(\ln n)^p < n$ для достаточно больших n;

---

*) При этом a_n и b_n, конечно, предполагаются отличными от нуля.

(в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ сходится: $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$ для достаточно больших n.

3) По теореме 2:

(а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n}$ $(0 < x < \pi)$ расходится: $\sin \frac{x}{n} : \frac{1}{n} \to x$;

аналогично, расходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \ (x > 0), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \ (a > 1);$$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$ сходится: $\left(1 - \cos \frac{x}{n}\right) : \frac{1}{n^2} \to \frac{x^2}{2}$.

4) Наконец, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right).$$

Методами дифференциального исчисления легко установить неравенство:

$$\ln(1 + x) < x \quad (x \neq 0, \quad -1 < x < \infty).$$

Пользуясь им, можем написать:

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

и в то же время

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$0 < \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом, члены данного ряда положительны и меньше соответственных членов сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ [n° 236], следовательно, и данный ряд сходится.

Если обозначить его сумму через C, то частичная сумма

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k}\right) = H_n - \ln(n+1) \to C$$

(H_n обозначает, как всегда, частичную сумму гармонического ряда). Можно заменить здесь $\ln(n+1)$ на $\ln n$, так как их разность, равная $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, стремится к нулю. Окончательно: обозначая через γ_n некоторую бесконечно малую, имеем для H_n замечательную формулу

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n. \tag{4}$$

Она показывает, что при бесконечном возрастании n частичная сумма H_n гармонического ряда растет, как $\ln n$.

Фигурирующая в формуле (4) постоянная C называется эйлеровой постоянной. Ее численное значение (которое удается вычислить из других соображений) таково:

$$C = 0{,}577215\ldots$$

239. Признаки Коши и Даламбера. Сравнение данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

с различными стандартными рядами, заведомо сходящимися или расходящимися, может быть проведено и в другой, так сказать, более организованной форме.

Возьмем для сравнения в качестве ряда (B), с одной стороны, сходящуюся геометрическую прогрессию

$$\sum q^n = q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \quad (0 < q < 1),$$

а с другой стороны — расходящуюся прогрессию

$$\sum 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

Сравнивая испытуемый ряд (A) с этими рядами по схеме теоремы 1, придем к следующему признаку:

Признак Коши. *Составим для ряда* (A) *выражение*

$$\mathscr{C}_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

Если, при достаточно больших n, выполняется неравенство

$$\mathscr{C}_n \leqslant q,$$

где q — постоянное число, меньшее единицы, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места,

$$\mathscr{C}_n \geqslant 1,$$

то ряд расходится.

Действительно, неравенства $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ или $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ равносильны, соответственно, таким: $a_n \leqslant q^n$ или $a_n \geqslant 1$; остается применить теорему 1 *).

Чаще, однако, этот признак применяют в другой, предельной, форме:

Допустим, что выражение $\mathscr{C}_n$ имеет предел (конечный или нет):

$$\lim \mathscr{C}_n = \mathscr{C}.$$

Тогда при $\mathscr{C} < 1$ ряд сходится, а при $\mathscr{C} > 1$ ряд расходится.

Если $\mathscr{C} < 1$, то возьмем положительное число ε, меньшее, чем $1 - \mathscr{C}$, так что и $\mathscr{C} + \varepsilon < 1$. По определению предела, для $n > N$ будет:

$$\mathscr{C} - \varepsilon < \mathscr{C}_n < \mathscr{C} + \varepsilon.$$

Число $\mathscr{C} + \varepsilon$ играет роль числа q в предыдущей формулировке: ряд сходится.

Если же $\mathscr{C} > 1$ и конечно, то, взяв $\varepsilon = \mathscr{C} - 1$, так что $\mathscr{C} - \varepsilon = 1$, для достаточно больших значений n на этот раз будем иметь $\mathscr{C}_n > 1$: ряд расходится. Аналогичный результат и при $\mathscr{C} = \infty$.

В случае, когда $\mathscr{C} = 1$, этот признак не дает возможности судить о поведении ряда.

Если сравнение ряда (A) с указанными стандартными рядами производить по теореме 3, то придем к такому признаку:

Признак Даламбера. *Рассмотрим для ряда* (A) *отношение*

$$\mathscr{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Если, при достаточно больших n, выполняется неравенство

$$\mathscr{D}_n \leqslant q,$$

где q — постоянное число, меньшее единицы, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места,

$$\mathscr{D}_n \geqslant 1,$$

то ряд расходится **).

Удобнее, однако, пользоваться предельной формой признака:

Допустим, что отношение $\mathscr{D}_n$ имеет предел (конечный или нет):

$$\lim \mathscr{D}_n = \mathscr{D}.$$

---

*) Расходимость ряда, конечно, может быть установлена и простой ссылкой на нарушение необходимого условия сходимости [n° 235, 5°].

**) И здесь расходимость прямо вытекает из нарушения необходимого условия сходимости: ведь, если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ или $a_{n+1} \geqslant a_n$, то a_n не может стремиться к нулю.

Тогда при $\mathscr{D}<1$ ряд сходится, а при $\mathscr{D}>1$ ряд расходится.

Доказательство — такое же, как и в случае признака Коши.

И этот признак ничего не дает, если оказывается, что $\mathscr{D}=1$.

Замечание. Мы сохранили за изложенным признаком имя Даламбера, как это делается обычно. Но на деле у Даламбера не было отчетливого представления о сходимости ряда и об его сумме как пределе частичных сумм. Даламбер предостерегает от пользования рядами, у которых отношение последующего члена к предыдущему окончательно становится абсолютно большим единицы, и считает такие ряды «ошибочными». Для того чтобы ряд был «хорошим и неошибочным», он требует лишь, чтобы упомянутое отношение окончательно становилось (абсолютно) меньшим единицы; подчеркнем, что мы потребовали выше другого, а именно, чтобы это отношение становилось меньшим постоянной правильной дроби q! Условие Даламбера недостаточно для сходимости ряда в современном смысле: оно, например, выполняется для заведомо расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

В предельной форме признак был впервые точно сформулирован и доказан Коши.

Примеры. 1) Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. К нему естественно применить признак Коши:

$$\mathscr{C}_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad \mathscr{C}=\frac{1}{e}<1,$$

так что ряд сходится.

2) Применим признак Даламбера к следующим рядам:

$$\text{(а)}\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x>0);\quad \mathscr{D}_n=\frac{x}{n+1},\quad \mathscr{D}=0,$$

ряд сходится, каково бы ни было значение x;

$$\text{(б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\ (x>0);\quad \mathscr{D}_n=\frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},\quad \mathscr{D}=\frac{x}{e},$$

ряд сходится при $x<e$ и расходится при $x>e$; при $x=e$ признак Даламбера, в предельной форме, ничего не дает, но так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ и всегда $\mathscr{D}_n>1$, то ряд все же расходится.

3) К гармоническим рядам

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}\ldots \quad (s>0) \qquad (\text{H}_s)$$

указанные признаки не приложимы. Действительно, в этом случае $\mathscr{C}_n = \frac{1}{n^{s/n}} < 1$, но $\lim \mathscr{C}_n = 1$, так как

$$\ln \mathscr{C}_n = -s \cdot \frac{\ln n}{n} \to 0 \qquad [\text{n}^\circ\, \mathbf{121}, 3)].$$

Аналогично, и $\mathscr{D}_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s} < 1$, но, очевидно, также $\lim \mathscr{D}_n = 1$.

Из других соображений [n° **236**] мы, однако, знаем, что гармонический ряд сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leqslant 1$.

240. Признак Раабе. В тех случаях, когда указанные простые признаки не дают ответа, приходится прибегать к более сложным признакам, основанным на сравнении испытуемого ряда уже с другими стандартными рядами, так сказать, „медленнее“ сходящимися или „медленнее“ расходящимися, чем прогрессия.

Мы рассмотрим здесь еще признак Раабе*), осуществляющий сравнение данного ряда (A) именно с гармоническими рядами (H_s). При этом приходится рассматривать такое выражение:

$$\mathscr{R}_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Признак Раабе. *Если, при достаточно больших n, выполняется неравенство*

$$\mathscr{R}_n \geqslant r,$$

где r — постоянное число, бо́льшее единицы, то ряд сходится; если же, начиная с некоторого места,

$$\mathscr{R}_n \leqslant 1,$$

то ряд расходится.

Итак, пусть при достаточно больших n имеем

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1 \quad \text{или} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{r}{n}.$$

Возьмем теперь какое-нибудь число s между 1 и r: $1 < s < r$. Так как — по известному предельному соотношению [n° **65**, 3)] —

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} = s,$$

*) Иозеф Людвиг Раабе (1801—1859) — немецкий математик.

то для достаточно больших n будет [n° **36**, 1°]

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^s-1}{-\frac{1}{n}}<r \quad \text{или} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^s>1-\frac{r}{n},$$

а следовательно, и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^s.$$

Это неравенство можно переписать следующим образом

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n-1}{n}\right)^s=\frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}.$$

Справа мы имеем отношение двух последовательных членов сходящегося ряда (H_s) ($s>1$!); применив теорему 3, убеждаемся в сходимости ряда (A).

Если же, начиная с некоторого места,

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leqslant 1,$$

то отсюда сразу находим, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{n-1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}};$$

применив к ряду (A) и к расходящемуся ряду (H_1) теорему 3, заключаем о расходимости ряда (A).

Признак Раабе тоже применяется преимущественно в предельной форме.

Допустим, что выражение $\mathscr{R}_n$ имеет предел (конечный или нет):

$$\lim \mathscr{R}_n=\mathscr{R}.$$

Тогда при $\mathscr{R}>1$ ряд сходится, а при $\mathscr{R}<1$ ряд расходится.

Сравнивая признаки Даламбера и Раабе, видим, что последний значительно сильнее первого. Если предел $\mathscr{D}=\lim \mathscr{D}_n$ существует и отличен от единицы, то для $\mathscr{R}_n=n(1-\mathscr{D}_n)$ существует предел $\mathscr{R}$, равный $+\infty$ при $\mathscr{D}<1$ и $-\infty$ при $\mathscr{D}>1$. Таким образом, если признак Даламбера дает ответ на вопрос о поведении данного ряда, то признак Раабе и подавно его дает; больше того, все такие случаи охватываются всего двумя из возможных значений $\mathscr{R}$, именно $\pm\infty$. Все остальные значения $\mathscr{R}$ (исключая $\mathscr{R}=1$), также дающие ответ на вопрос о сходимости, соответствуют,

таким образом, случаям, когда признак Даламбера заведомо ответа не дает, потому что $\mathscr{D}=1$.

В качестве примера применения признака Раабе рассмотрим ряд:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

Признак Даламбера к этому ряду неприложим, ибо $\mathscr{D}_n=\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\to 1$ (и притом $\mathscr{D}_n<1$). Составим выражение Раабе:

$$\mathscr{R}_n=n\left(1-\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right)=\frac{6n-1}{2(2n+1)}.$$

Так как $\mathscr{R}=\lim\mathscr{R}_n=\frac{3}{2}>1$, то ряд сходится.

Однако при $\mathscr{R}=1$ мы все же снова не имеем ответа на вопрос о поведении ряда. В подобных случаях (которые очень редки) приходится прибегать к еще более тонким и сложным признакам.

241. Интегральный признак Маклорена — Коши. В заключение, мы выведем еще один признак, отличающийся по форме от всех предыдущих.

Пусть предложенный ряд имеет форму

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}f(n), \tag{5}$$

где $f(n)$ есть значение при $x=n$ некоторой функции $f(x)$, определенной для $x\geqslant 1$ *); функцию эту предположим непрерывной, положительной и монотонно убывающей.

Рассмотрим какую-либо первообразную функцию для $f(x)$:

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

Так как ее производная $F'(x)=f(x)>0$, то $F(x)$ возрастает вместе с x и при $x\to\infty$ наверно имеет предел L, конечный или нет [n° 47]. На различении этих случаев и построен следующий признак сходимости и расходимости, который был высказан в геометрической форме еще в 1742 г. Маклореном, но остался незамеченным, и вновь был открыт в 1827 г. Коши.

Интегральный признак. *Ряд (5) сходится, если предел L первообразной $F(x)$ конечен, и расходится, если $L=\infty$.*

---

*) Начальным значением номера n, вместо 1, может быть и любое другое натуральное число n_0; тогда и функцию $f(x)$ надлежит рассматривать при $x\geqslant n_0$.

Очевидно, безразлично, о какой из первообразных вести речь, ибо любые две первообразные могут разниться лишь на постоянную; положим

$$F(x)=\int_1^x f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Ввиду монотонности функции $f(x)$, для $n\leqslant x\leqslant n+1$,

$$a_{n+1}=f(n+1)\leqslant f(x)\leqslant f(n)=a_n,$$

так что и

$$a_{n+1}\leqslant\int_n^{n+1} f(x)\,dx\leqslant a_n.$$

Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

n-я частичная сумма есть

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx=F(n+1);$$

ясно, что этот ряд сходится или расходится именно в зависимости от того, будет ли L конечным или нет. При конечном L, по «теореме сравнения» 1 [n° 237], сходится и ряд с меньшими членами: $\sum_1^{\infty} a_{n+1}$, а с ним и ряд (5); наоборот, при $L=\infty$ и подавно расходится ряд с бо́льшими членами: $\sum_1^{\infty} a_n$, т. е. ряд (5).

Примеры. 1) Рассмотрим прежде всего вновь гармонические ряды:

$$\text{(а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \quad \text{(б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \quad (s>1).$$

В случае (а):

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad F(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln x\to\infty \quad \text{при} \quad x\to\infty,$$

ряд расходится.

В случае (б):

$$f(x)=\frac{1}{x^s},\quad F(x)=\int\frac{dx}{x^s}=-\frac{1}{s-1}x^{-(s-1)}\to 0 \text{ при } x\to\infty,$$

и ряд сходится.

Эти уже знакомые нам результаты [n° 236] пополним новым:

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Здесь

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}, \quad F(x) = \int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \ln \ln x \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

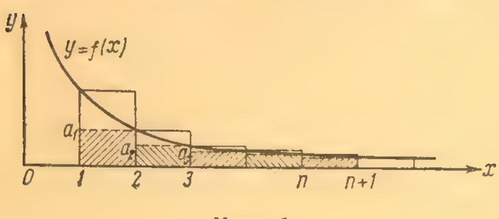
ряд расходится.

Заметим, что предел интеграла (6) при $x \to \infty$ называют интегралом от 1 до ∞ *) и обозначают так:

$$F(\infty) = \int_1^{\infty} f(x)\, dx.$$

Таким образом, можно сказать, что *предложенный ряд* (5) *сходится или расходится, смотря по тому, имеет ли этот интеграл конечное значение или нет.*

В такой форме интегральный признак допускает простое геометрическое истолкование, близкое к идее Маклорена. Если изобразить функцию $f(x)$ кривой (черт. 1), то интеграл $F(x)$ будет выражать площадь фигуры, ограниченной этой кривой, осью x и двумя ординатами; интеграл же $F(\infty)$, в некотором смысле, можно рассматривать, как выражение для площади всей бесконечно простирающейся направо фигуры под кривой. С другой же стороны, члены $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ряда (5) выражают величины ординат в точках $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ или, что то же, площади прямоугольников с основаниями 1 и с высотами, равными упомянутым ординатам.



Черт. 1.

Таким образом, сумма ряда (5) есть не что иное, как сумма площадей выходящих прямоугольников, и лишь первым членом отличается от суммы площадей входящих прямоугольников. Это делает совершенно наглядным установленный выше результат: если площадь криволинейной фигуры конечна, то и подавно конечна площадь заключенной в ней ступенчатой фигуры, и предложенный ряд сходится; если же площадь криволинейной фигуры бесконечна, то бесконечна и площадь содержащей ее ступенчатой фигуры, так что в этом случае ряд расходится.

---

*) Это так называемый несобственный интеграл; подобными интегралами мы будем заниматься в главе XVII.

§ 3. СХОДИМОСТЬ ПРОИЗВОЛЬНЫХ РЯДОВ

242. Принцип сходимости. Обратимся к вопросу о сходимости рядов, члены которых могут иметь произвольные знаки. Мы знаем [n° 234], что — по самому определению — вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+m} + \ldots$$

тождествен с вопросом о существовании конечного предела для последовательности частичных сумм

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+m}, \ldots \qquad (1)$$

В n° 52 был установлен принцип сходимости для последовательности, дающий общее условие, необходимое и достаточное для существования такого предела. Перефразируя этот принцип применительно к последовательности (1), можно теперь сформулировать его так:

Для того чтобы ряд (A) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы каждому числу* $\varepsilon > 0$ *отвечал такой номер* N, *чтобы при* $n > N$ *неравенство*

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (2)$$

выполнялось, каково бы ни было $m = 1, 2, 3, \ldots$ *).

(Здесь $n+m$ играет роль второго номера n' в n° 52, который не зависит от n и, без умаления общности, может быть взят бо́льшим, чем n.)

Если, предполагая ряд сходящимся, в неравенстве (2), в частности, положить $m = 1$, то получим:

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{при } n > N),$$

так что $a_{n+1} \to 0$ или (что то же) $a_n \to 0$, и мы возвращаемся к необходимому условию n° 235, 5°. Оно само по себе еще не обеспечивает сходимости ряда, и именно потому, что далеко не исчерпывает содержания высказанного выше условия: нужно не только чтобы достаточно далекие члены ряда в отдельности были сколь угодно малы, но и чтобы суммы таких членов оказывались сколь угодно малыми, независимо от того, сколько их ни взять. Это хорошо иллюстрируется примером гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, у которого общий член $\left(= \frac{1}{n}\right)$ стремится к 0, и

---

*) Авторы этого условия — Больцано и Коши — оба дали его применительно именно к вопросу о сходимости бесконечного ряда.

в то же время, если за этим членом взять еще $n-1$ следующих членов, то сумма всех оказывается $>\frac{1}{2}$ [n° **236**, (1)].

243. Абсолютная сходимость. Так как непосредственное применение принципа сходимости чаще всего вызывает затруднения, то представляет интерес изучение классов случаев, когда вопрос решается с помощью более простых средств.

Мы видели в предыдущем параграфе, что в отношении положительных рядов сходимость по большей части устанавливается легко, благодаря наличию ряда удобных признаков. Поэтому естественно начать с тех случаев, когда вопрос о сходимости данного ряда приводится к вопросу о сходимости положительного ряда.

Если члены ряда не все положительны, но, начиная с некоторого места, становятся положительными, то, отбросив достаточное количество начальных членов ряда [n° **235**, 1°], сведем дело к исследованию положительного ряда. Если члены ряда отрицательны или, по крайней мере, с некоторого места становятся отрицательными, то мы вернемся к уже рассмотренным случаям путем изменения знаков всех членов [n° **235**, 3°]. Таким образом, существенно новым случаем будет тот, когда среди членов ряда есть бесконечное количество как положительных, так и отрицательных членов.

Дадим следующее определение: *если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

сходится одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \tag{A*}$$

то ряд (A) *называется абсолютно сходящимся.*

Имеет место

Теорема Коши. *Сходимость одного лишь ряда* (A*), *составленного из абсолютных величин членов данного ряда* (A), *влечет за собой уже и сходимость этого последнего.*

Доказательство сразу получается из принципа сходимости: неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}|$$

показывает, что если условие сходимости выполняется для ряда (A*), то оно тем более выполняется для ряда (A).

Можно рассуждать и иначе. Рассмотрим в отдельности положительные члены ряда (A) и абсолютные величины его отрицательных членов. Перенумеровав и те и другие в том порядке,

в каком эти члены встречаются в ряде (A), составим два (положительных) ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots \quad (B), \qquad \sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \ldots \quad (C).$$

Из сходимости ряда (A*) вытекает сходимость обоих этих рядов. Действительно, любая частичная сумма, B_k или C_m, того или другого из них может быть превзойдена некоторой частичной суммой ряда (A*) и, следовательно, остается меньшей суммы A^* этого ряда [n° **236**].

Если взять теперь частичную сумму A_n ряда (A), то ее можно представить в виде разности

$$A_n = B_k - C_m,$$

где k и m означают, соответственно, число положительных или отрицательных слагаемых в составе суммы A_n, так что k и m зависят от n и возрастают вместе с n до бесконечности*). Тогда, очевидно, существует конечный предел

$$A = \lim A_n = B - C, \tag{3}$$

где B и C — суммы рядов (B) и (C), и сходимость ряда (A) доказана. Вместе с тем попутно дополнительно установлено полезное утверждение, что при сделанных предположениях сумма данного ряда равна разности между суммой ряда, составленного из одних положительных его членов, и суммой ряда, составленного из абсолютных величин отрицательных членов.

Таким образом, одной лишь сходимости ряда (A*) достаточно для абсолютной сходимости ряда (A).

Как увидим ниже, возможны случаи, когда ряд (A) сходится, а ряд (A*) — нет. *Тогда ряд* (A) *называют неабсолютно сходящимся.*

Для установления абсолютной сходимости ряда (A) к положительному ряду (A*) могут быть применены все признаки сходимости, изученные в предыдущем параграфе. Но нужно быть осторожным с признаками расходимости: если даже ряд (A*) окажется расходящимся, то ряд (A) может все же сходиться (неабсолютно). Исключение представляют только признаки Коши и Даламбера, и именно потому, что, когда они констатируют расходимость ряда (A*), то это значит, что общий член $|a_n|$ ряда (A*) не стремится к нулю**), а тогда и a_n к нулю не стремится, так что и ряд (A) также расходится. Поэтому упомянутые признаки могут

---

*) Мы все время имеем в виду случай, когда среди членов ряда (A) бесконечно много и положительных и отрицательных.

**) См. сноски на стр. 22.

быть перефразированы применительно к произвольному ряду. Сделаем это, например, для признака Даламбера:

Признак Даламбера. *Пусть для отношения* $\mathscr{D}_n^* = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *существует определенный предел:*

$$\mathscr{D}^* = \lim \mathscr{D}_n^*;$$

тогда при $\mathscr{D}^* < 1$ *данный ряд* (A) *абсолютно сходится, а при* $\mathscr{D}^* > 1$ *он расходится.*

Примеры. 1) Применим признак Даламбера к рядам (а) и (б), о которых была речь в 2) n° 239, но отбросив требование $x > 0$. Мы получим, что

(а) ряд абсолютно сходится для всех значений x;

(б) ряд абсолютно сходится при $-e < x < e$ и расходится при $x \geq e$ или $x \leq -e$ (при $x = \pm e$ нарушается необходимое условие сходимости).

2) Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots$$

имеем:

$$\mathscr{D}_n^* = \frac{n}{n+1} |x|, \quad \mathscr{D}^* = |x|,$$

так что ряд сходится абсолютно для $|x| < 1$, расходится для $|x| > 1$. При $x = -1$ ряд также расходится, ибо получается из гармонического изменением знаков его членов. При $x = 1$ мы приходим к ряду

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots,$$

относительно которого вопрос о сходимости пока остается открытым.

244. Знакопеременные ряды. С помощью соображений предыдущего номера, если и может быть установлена, то только абсолютная сходимость ряда — к неабсолютно сходящимся рядам они заведомо неприложимы. Поэтому мы рассмотрим, в заключение, вопрос о сходимости одного специального, но важного класса рядов, называемых знакопеременными, среди которых есть и неабсолютно сходящиеся.

Знакопеременными называются ряды, члены которых поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки. Знакопеременный ряд удобнее записывать так, чтобы знаки членов были выявлены, например (если считать все $c_n > 0$),

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots \tag{4}$$

По отношению к подобным рядам еще в 1714 г. Лейбниц (в письме к Иог. Бернулли) высказал следующую простую теорему.

Теорема Лейбница. *Если члены знакопеременного ряда* (4) *монотонно убывают по абсолютной величине:*

$$c_{n+1} < c_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

и стремятся к нулю:

$$\lim c_n = 0,$$

то ряд сходится.

Доказательство. Частичную сумму четного порядка C_{2m} можно написать в виде:

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Так как каждая скобка, ввиду (5), есть положительное число, то отсюда ясно, что с возрастанием m сумма C_{2m} также возрастает. С другой стороны, если переписать C_{2m} так:

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

то легко усмотреть, что C_{2m} остается сверху ограниченной:

$$C_{2m} < c_1.$$

В таком случае, по теореме о монотонной переменной [n° 44], при безграничном возрастании m частичная сумма C_{2m} имеет конечный предел

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} = C.$$

Переходя к частичной сумме нечетного порядка C_{2m-1}, имеем, очевидно, $C_{2m-1} = C_{2m} + c_{2m}$. Так как общий член стремится к нулю, то и

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m-1} = C.$$

Отсюда следует, что C и будет суммой данного ряда.

Замечание. Мы видели, что частичные суммы четного порядка C_{2m} приближаются к сумме C ряда возрастая. Написав C_{2m-1} в виде

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}),$$

легко установить, что суммы нечетного порядка стремятся к C убывая. Таким образом, всегда

$$C_{2m} < C < C_{2m-1}.$$

В частности, можно утверждать, что

$$0 < C < c_1. \tag{6}$$

Это позволяет дать весьма простую и удобную оценку для остатка рассматриваемого ряда (который и сам представляет собою такой же знакопеременный ряд). Именно:

$$\gamma_n = (-1)^{n-1} \{c_n - c_{n+1} + \ldots\}.$$

В силу (6), выражение в скобках положительно и меньше c_n.

Таким образом, во всех случаях *остаток ряда лейбницевского типа* *) *имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.*

Это замечание часто используется при приближенных вычислениях с помощью рядов [см. n° **260**].

Простейшими примерами рядов лейбницевского типа служат ряды

$$(\text{a})\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

и

$$(\text{б})\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

Сходимость обоих рядов вытекает из доказанной теоремы.

В то же время ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся: для ряда (а) это будет гармонический ряд, для ряда же (б) получится ряд

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots,$$

расходимость которого ясна из того, что его частичная сумма

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}H_n.$$

Таким образом, ряды (а) и (б) дают первые примеры неабсолютно сходящихся рядов. [Ниже мы установим, что сумма первого из них есть $\ln 2$, а сумма второго равна $\frac{\pi}{4}$ (см. n° **256** (22) и n° **255** (20)).]

§ 4. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

245. Сочетательное свойство. Понятие суммы бесконечного ряда существенно отличается от понятия суммы конечного числа слагаемых (рассматриваемого в арифметике и алгебре) тем, что включает в себя предельный переход. Хотя некоторые свойства обычных сумм переносятся и на суммы бесконечных рядов, но чаще всего лишь при выполнении определенных условий, которые и подлежат изучению. В иных же случаях привычные нам свойства сумм разительным образом нарушаются, так что, вообще, в этом вопросе надлежит соблюдать осторожность.

---

*) Так мы называем знакопеременный ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница.

Рассмотрим сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots; \tag{A}$$

последовательность его частичных сумм

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{1}$$

сходится к сумме ряда A. Станем объединять члены ряда произвольным образом в группы, не меняя при этом их расположения:

$$a_1 + \ldots + a_{n_1}, \quad a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}, \ldots,$$
$$a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}, \ldots$$

Здесь $\{n_k\}$ есть некоторая, извлеченная из натурального ряда, частичная возрастающая последовательность номеров.

Теорема. *Ряд, составленный из этих сумм:*

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}) + \ldots \tag{$\tilde{A}$}$$

всегда сходится и имеет ту же сумму A, что и исходный ряд. Иными словами: *сходящийся ряд обладает сочетательным свойством.*

Действительно, последовательность частичных сумм нового ряда

$$\tilde{A}_1, \quad \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_k, \ldots$$

есть не что иное, как частичная последовательность

$$A_{n_1}, \quad A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}, \ldots$$

для последовательности (1) и, следовательно, сходится к тому же пределу A.

Мы видим — пока — полную аналогию с обычными суммами; но эта аналогия нарушается, если мы попытаемся применять сочетательное свойство, так сказать, в обратном порядке. Если дан сходящийся ряд ($\tilde{A}$), члены которого каждый в отдельности представляют собой сумму конечного числа слагаемых, то, опустив скобки, мы получим новый ряд (A), могущий оказаться и расходящимся. Вот простой тому пример: ряд

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots,$$

очевидно, сходится, между тем как полученный из него опусканием скобок ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

будет расходящимся.

Конечно, *если — опустив скобки — мы получим сходящийся ряд* (A), *то его сумма та же, что и у ряда* ($\tilde{A}$). Это вытекает из доказанного выше.

Замечание. При некоторых условиях можно наперед гарантировать, что ряд (A) будет сходиться. Простейшим случаем этого рода является тот, когда все слагаемые в ($\tilde{A}$) внутри одних и тех же скобок будут одного знака*).

Действительно, тогда при изменении n от n_{k-1} до n_k частичная сумма A_n будет изменяться монотонно, следовательно, будет содержаться между $A_{n_{k-1}} = \tilde{A}_{k-1}$ и $A_{n_k} = \tilde{A}_k$. При достаточно большом k эти последние суммы произвольно мало разнятся от суммы $\tilde{A}$ ряда ($\tilde{A}$), следовательно, то же справедливо и относительно суммы A_n — при достаточно большом n, так что $A_n \to \tilde{A}$.

246. Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов. Пусть дан сходящийся ряд (A), имеющий сумму A. Переставив в нем члены произвольным образом, мы получим новый ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_k + \ldots \qquad (A')$$

Каждый член a'_k этого ряда отождествляется с определенным членом a_{n_k} исходного ряда**).

Возникает вопрос, сходится ли ряд (A′) и — в случае сходимости — будет ли его сумма равна сумме A исходного ряда. При рассмотрении этого вопроса нам придется провести резкое различие между абсолютно и неабсолютно сходящимися рядами.

Теорема Дирихле*****). *Если ряд* (A) *абсолютно сходится, то ряд* (A′), *полученный из него перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму* A, *что и исходный ряд.* Иными словами, *абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством.*

Доказательство. Проведем доказательство в два приема.

(а) Предположим сначала, что ряд (A) — положительный.

Рассмотрим произвольную частичную сумму A'_k ряда (A′). Так как

$$a'_1 = a_{n_1}, \quad a'_2 = a_{n_2}, \ \ldots, \ a'_k = a_{n_k},$$

то, взяв n' бо́льшим всех номеров $n_1, n_2, \ldots, n_k$, очевидно, будем иметь $A'_k \leqslant A_{n'}$, а следовательно, и подавно

$$A'_k \leqslant A.$$

---

*) Этот знак, от одних скобок к другим, может меняться.

**) Причем последовательность номеров $\{n_k\}$ без пропусков и повторений воспроизводит — с точностью до порядка — натуральный ряд.

***) Петер Густав Лежен-Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

В таком случае (A′) будет сходящимся [n° **236**], и его сумма A' не превзойдет A:

$$A' \leqslant A.$$

Но и ряд (A) из (A′) получается перестановкой членов, поэтому аналогично:

$$A \leqslant A'.$$

Сопоставляя полученные соотношения, придем к требуемому равенству:

$$A' = A.$$

(б) Пусть теперь (A) будет произвольный абсолютно сходящийся ряд.

Так как сходящийся положительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \tag{A*}$$

по доказанному, при любой перестановке членов останется сходящимся, то по теореме n° **243** сохранит при этом свою (абсолютную) сходимость и ряд (A).

Далее, мы видели в n° **243**, что, в случае абсолютной сходимости ряда (A), его сумма выражается так:

$$A = B - C,$$

где B и C суть суммы положительных рядов (B) и (C), составленных, соответственно, из положительных членов ряда (A) и из абсолютных величин его отрицательных членов. Перестановка членов в ряде (A) вызовет перестановку членов и в этих рядах, но не отразится (по доказанному) на их суммах B и C. Следовательно, и сумма ряда (A) останется прежней, что и требовалось доказать.

247. Случай неабсолютно сходящихся рядов. Обратимся теперь к рассмотрению неабсолютно сходящихся рядов и установим, что *они переместительным свойством не обладают.*

Сделаем одно предварительное замечание. Предположим, что ряд (A) сходится, но не абсолютно. Из сходимости следует, что $\lim a_n = 0$ [n° **235**, 5°]. Что же касается до рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{(B)}, \qquad\qquad \sum_{m=1}^{\infty} c_m \quad \text{(C)},$$

о которых мы упоминали в предыдущем номере, то, хотя, очевидно,

$$\lim_{k \to \infty} b_k = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m \to \infty} c_m = 0, \tag{2}$$

но в данном случае они оба расходятся. Действительно, если среди первых n членов ряда (A) есть k положительных и m отрицательных, то

$$A_n = B_k - C_m, \quad A_n^* = B_k + C_m.$$

Второе из этих равенств показывает, что оба ряда (B) и (C) не могут одновременно сходиться, ибо иначе сходился бы и ряд (A*), вопреки предположению. А из первого усматриваем, что если бы один из этих рядов сходился, а другой нет, то расходился бы ряд (A), что также противоречит предположению.

Докажем теперь следующую интересную теорему:

Теорема Римана. *Если ряд* (A) *сходится неабсолютно, то какое бы ни взять наперед число L, конечное или равное $\pm\infty$, можно так переставить члены в этом ряде, чтобы преобразованный ряд имел своей суммой именно L.*

Доказательство. Остановимся на случае конечного L. Начнем с замечания, что ввиду n° 235, 1° и все остатки рядов (B) и (C) также будут расходящимися, так что в каждом из этих рядов, начиная с любого места, можно набрать столько членов, чтобы их сумма превзошла любое число.

Пользуясь этим, мы следующим образом произведем перестановку членов ряда (A).

Сначала возьмем столько положительных членов нашего ряда в том порядке, в каком они в нем расположены, чтобы их сумма превзошла число L:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} > L.$$

Вслед за ними выпишем отрицательные члены (в том порядке, в каком они расположены в данном ряде), взяв их столько, чтобы общая сумма стала меньше L:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m_1} < L.$$

После этого снова поместим положительные члены из числа оставшихся так, чтобы было

$$b_1 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - \ldots - c_{m_1} + b_{k_1+1} + \ldots + b_{k_2} > L.$$

Затем наберем столько отрицательных членов из числа оставшихся, чтобы было

$$b_1 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - \ldots - c_{m_1} + b_{k_1+1} + \ldots + \\ + b_{k_2} - c_{m_1+1} - \ldots - c_{m_2} < L$$

и т. д. Процесс этот мы мыслим продолженным до бесконечности; очевидно, каждый член ряда (A), и притом со своим знаком, встретится на определенном месте.

Если всякий раз, выписывая члены b или c, набирать их не больше, чем необходимо для осуществления требуемого неравен-

ства, то уклонение от числа L в ту или другую сторону не превзойдет по абсолютной величине последнего написанного члена. Тогда из (2) ясно, что ряд

$$(b_1 + \ldots + b_{k_1}) - (c_1 + \ldots + c_{m_1}) + \ldots$$
$$\ldots + (b_{k_{i-1}+1} + \ldots + b_{k_i}) - (c_{m_{i-1}+1} + \ldots + c_{m_i}) + \ldots$$

имеет своей суммой L. В силу замечания n° **245**, это останется верным и после раскрытия скобок.

Если $L = +\infty$, то можно было бы набор положительных чисел подчинить требованию, чтобы суммы последовательно становились больше 1, 2, 3, и т. д., а из отрицательных членов помещать лишь по одному после каждой группы положительных. Таким путем, очевидно, составился бы ряд, имеющий сумму $+\infty$. Аналогично можно получить и ряд с суммой $-\infty$.

Установленный результат подчеркивает тот факт, что *неабсолютная* сходимость осуществляется лишь благодаря взаимному погашению положительных и отрицательных членов, и именно потому существенно зависит от порядка, в котором они следуют один за другим, между тем как *абсолютная* сходимость основана на быстроте убывания этих членов — и от порядка их не зависит.

Пример. Рассмотрим заведомо неабсолютно сходящийся ряд:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \ldots, \qquad (3)$$

сумма которого, как увидим ниже, есть $\ln 2$ *). Переместив его члены так, чтобы после одного положительного следовали два отрицательных:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}} + \ldots, \qquad (4)$$

мы утверждаем, что *сумма ряда от такого перемещения уменьшится вдвое*.

В самом деле, если обозначить частичные суммы этих рядов, соответственно, через A_n и A'_n, то

$$A'_{3m} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} A_{2m},$$

*) Здесь для нас существенно лишь то, что эта сумма отлична от нуля [n° **244**, (6)].

так что $A'_{3m} \to \frac{1}{2}\ln 2$. Так как

$$A'_{3m-1} = A'_{3m} + \frac{1}{4m} \quad \text{и} \quad A'_{3m-2} = A'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2}$$

стремятся к тому же пределу $\frac{1}{2}\ln 2$, то ряд (4) сходится и имеет суммой именно это число.

248. Умножение рядов. О почленном сложении или вычитании двух сходящихся рядов, равно как о почленном умножении сходящегося ряда на постоянный множитель, уже была речь в n° 235, 3° и 4°. Теперь мы займемся вопросом об *умножении рядов*.

Пусть даны два сходящихся ряда:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

и

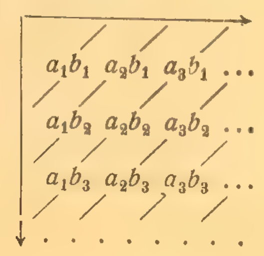
$$B = \sum_{m=1}^{\infty} b_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_m + \ldots \tag{B}$$

Подражая правилу умножения конечных сумм, рассмотрим и здесь всевозможные парные произведения членов этих рядов: $a_i b_k$; из них составится бесконечная прямоугольная матрица:

$$\begin{array}{|llllll}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \ldots & a_ib_1 & \ldots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \ldots & a_ib_2 & \ldots \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \ldots & a_ib_3 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \ldots & a_ib_k & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{5}$$

Эти произведения можно многими способами располагать в виде простой последовательности.

Например, как это впервые сделал Коши, можно выписывать произведения *по диагоналям*



объединяя при этом члены, стоящие на одной диагонали:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots$$
$$\dots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1) + \dots \qquad (6)$$

Теорема Коши. Если оба ряда (А) *и* (В) *сходятся абсолютно, то ряд* (6), *составленный из произведений* (5), *также сходится и имеет своей суммой произведение сумм AB.*

Доказательство. По предположению, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \qquad (A^*)$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| = |b_1| + |b_2| + \dots + |b_m| + \dots \qquad (B^*)$$

сходятся, т. е. имеют конечные суммы, скажем, A^* и B^*. Если для этих рядов составить ряд, вроде (6):

$$|a_1| \cdot |b_1| + (|a_1| \cdot |b_2| + |a_2| \cdot |b_1|) + (|a_1| \cdot |b_3| + |a_2| \cdot |b_2| +$$
$$+ |a_3| \cdot |b_1|) + \dots + (|a_1| \cdot |b_n| + |a_2| \cdot |b_{n-1}| + \dots + |a_{n-1}| \cdot |b_2| +$$
$$+ |a_n| \cdot |b_1|) + \dots, \qquad (6^*)$$

то он явно будет сходящимся, ибо его n-я частичная сумма меньше

$$(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|)(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|) < A^* B^*$$

[n° 236]. Сходимость сохранится и в том случае, если скобки в (6*) опустить [см. замечание n° 245]. Отсюда следует [n° 243], что ряд, полученный из (6) опусканием скобок,

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \dots,$$

также сходится и притом абсолютно. В таком случае он обладает не только сочетательным, но и переместительным свойством [n° 245, 246]. Его сумма, совпадающая с суммой ряда (6), проще всего может быть определена так. Расположим его члены не по диагоналям, а по квадратам:

$$\begin{array}{cccc}
a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\
a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\
a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

и вдобавок объединим последовательные группы, которые отличают один квадрат от другого:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + \\ + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \dots \qquad (7)$$

Частичные суммы ряда (7) будут

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3,\ \dots,\ A_nB_n, \dots$$

(если через A_n, B_n, как обычно, обозначить частичные суммы рядов (A) и (B)); они стремятся к произведению AB, которое, таким образом, является суммой не только ряда (7), но и ряда (6).

Примеры. 1) Помножив ряд

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \qquad (|x| < 1)$$

на самого себя, получим:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

2) Как мы знаем уже [n° 243, 1)(a)], ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

абсолютно сходится при всех значениях x. Обозначим его сумму через $E(x)$. Произведение $E(x)$ на $E(y)$ может быть построено по правилу умножения рядов. Общий член произведения будет таков:

$$1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} + \\ + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} x^k y^{n-k} = \\ = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Таким образом для функции $E(x)$ получается соотношение

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y).$$

[Впоследствии мы увидим, что $E(x) = e^x$.]

3) Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots,$$

по теореме Лейбница, сходится, но не абсолютно [n° 234, 2)]. Если, все же, попытаться умножить его на самого себя по правилу Коши, то получится ряд с общим членом

$$(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k+1}}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right).$$

Так как каждое слагаемое в скобках больше $\frac{1}{n}$, то все выражение по абсолютной величине >1, и — ввиду нарушения необходимого условия сходимости — ряд расходится! Этот пример принадлежит самому Коши.

Замечание. Можно показать, что, если из двух сходящихся рядов (A) и (B) хоть один сходится абсолютно, то правило Коши еще сохраняет силу. Только, если оба перемножаемых ряда сходятся неабсолютно (как в предыдущем примере), их произведение может оказаться расходящимся.

§ 5. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

249. Основные понятия. Если

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots \tag{1}$$

есть некоторая заданная последовательность чисел, то составленный из них символ

$$p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_n\cdot\ldots=\prod_{n=1}^{\infty} p_n\ ^{*)} \tag{2}$$

называют бесконечным произведением.

Станем последовательно перемножать числа (1), составляя частичные произведения

$$P_1=p_1,\ P_2=p_1\cdot p_2,\ P_3=p_1\cdot p_2\cdot p_3,\ \ldots,$$
$$P_n=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n,\ \ldots \tag{3}$$

Эту последовательность частичных произведений $\{P_n\}$ мы всегда будем сопоставлять символу (2).

Конечный или бесконечный предел P частичного произведения P_n при $n\to\infty$:

$$\lim P_n=P,$$

*) Символ $\prod$ и означает произведение.

называют *значением* *произведения* (2), и пишут:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Если бесконечное произведение имеет *конечное* *значение* P *и притом* *отличное* *от нуля, то само произведение называют* *сходящимся*, *в противном же случае* — *расходящимся**).

Достаточно одному из сомножителей произведения быть нулем, чтобы и значение всего произведения также было равно нулю. В дальнейших рассмотрениях мы этот случай будем исключать, так что для нас всегда $p_n \neq 0$.

Читатель легко установит аналогию с рядами [n° **234**] и уяснит себе, что — подобно рядам — и рассмотрение бесконечного произведения также есть лишь своеобразная форма изучения последовательности и ее предела. С этой формой полезно познакомиться, так как в иных случаях она представляется более удобной, чем другие.

Примеры. 1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Так как частичное произведение

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2},$$

то бесконечное произведение сходится, и его значением будет $\frac{1}{2}$.

2) Формула Валлиса [n° 188]

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)},$$

очевидно, равносильна разложению числа $\frac{\pi}{2}$ в бесконечное произведение

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots$$

Она же приводит к формулам

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right] = \frac{\pi}{4}, \quad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

---

*) Таким образом (подчеркнем это), если $P=0$, то произведение для нас будет расходящимся. Хотя эта терминология идет в разрез с терминологией, привычной для рядов, но она общепринята, ибо облегчает формулировку многих теорем.

250. Простейшие теоремы. Связь с рядами. Отбросив в бесконечном произведении (2) первые m членов, получим остаточное произведение

$$\pi_m = p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \ldots \cdot p_{m+k} \cdot \ldots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n, \tag{4}$$

которое вполне аналогично остатку бесконечного ряда.

1°. *Если сходится произведение* (2), *то сходится, при любом* m, *и произведение* (4); *обратно, из сходимости произведения* (4) *вытекает сходимость исходного произведения* (2) *).

Доказательство предоставляем читателю [ср. n° **235**, 1°].

Таким образом, и в случае бесконечного произведения *отбрасывание конечного числа начальных множителей или присоединение вначале нескольких новых множителей (отличных от* 0) *на его поведении не отражается.*

2°. *Если бесконечное произведение* (2) *сходится, то*

$$\lim_{m \to \infty} \pi_m = 1$$

[см. (4)].

Это следует из равенства

$$\pi_m = \frac{P}{P_m}$$

и из того, что P_m стремится к $P \neq 0$.

3°. *Если бесконечное произведение* (2) *сходится, то*

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 1.$$

Действительно, вместе с P_n, и P_{n-1} стремится к P, так что

$$\lim_{n \to \infty} p_n = \lim \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

[Ср. n° **235**, 5°.]

Не перечисляя других свойств бесконечных произведений, аналогичных свойствам бесконечных рядов, мы обратимся к установлению связи между сходимостью бесконечных произведений и рядов, что позволит нам непосредственно использовать для произведений подробно развитую для рядов теорию.

В случае сходящегося произведения множители p_n, начиная с некоторого места, будут положительны (3°). Впрочем, ввиду 1°, мы не нарушим общности, если будем впредь предполагать все $p_n > 0$.

---

*) Напомним, что мы раз навсегда предположили $p_n \neq 0$.

4°. *Для того чтобы бесконечное произведение* (2) *сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n. \tag{5}$$

При выполнении этого условия, если L *есть сумма ряда, имеем:*

$$P = e^L.$$

Обозначив через L_n частичную сумму ряда (5), будем иметь:

$$L_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{L_n}.$$

Из непрерывности логарифмической и показательной функций теперь следует, что если P_n стремится к конечному положительному пределу P, то L_n стремится к $\ln P$, и обратно — если L_n имеет конечный предел L, то для P пределом будет e^L.

При исследовании сходимости бесконечного произведения (2) часто представляется удобным, полагая

$$p_n = 1 + a_n,$$

записывать его в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \tag{2*}$$

а ряд (5) — в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n). \tag{5*}$$

В этих обозначениях имеем простую теорему:

5°. *Если, по крайней мере, для достаточно больших* n *будет*

$$a_n > 0 \quad (\textit{или } a_n < 0),$$

то для сходимости произведения (2*) *необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{6}$$

Так как для сходимости как произведения (2*), так и ряда (6) во всяком случае необходимо, чтобы было

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \tag{7}$$

[см. 3°], то предположим это условие выполненным. Тогда имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

[n° **65**, 1)]. В таком случае, ввиду того, что члены обоих рядов (5*) и (6), начиная с некоторого места, сохраняют определенный знак, по теореме 2 n° **237** эти ряды сходятся или расходятся одновременно. Отсюда, в связи с 4°, и следует наше утверждение.

Упомянем о случае, когда бесконечное произведение «расходится» к 0.

6°. *Для того чтобы бесконечное произведение* (2) [*или* (2*)] *имело нулевое значение, необходимо и достаточно, чтобы ряд* (5) [*или* (5*)] *имел суммой* $-\infty$.

В частности, это будет так, если $a_n < 0$ *и ряд* (6) *расходится.*

Предоставляем доказательство читателю.

В заключение используем связь между произведением (2) [или (2*)] и рядом (5) [или (5*)] для установления понятия абсолютной сходимости бесконечного произведения. *Произведение называют абсолютно сходящимся именно в том случае, когда абсолютно сходится соответствующий ряд из логарифмов его множителей.*

Исследования n° **246** и **247** сразу же позволяют заключить, что абсолютно сходящиеся произведения обладают переместительным свойством, в то время как неабсолютно сходящиеся заведомо им не обладают.

Легко доказать, по образцу 5°, что

7°. *Для абсолютной сходимости произведения* (2*) *необходима и достаточна абсолютная же сходимость ряда* (6).

251. Примеры. 1) Применим доказанные теоремы к бесконечным произведениям:

(а) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ сходится при $x>1$ и расходится при $0<x\leq 1$,

в согласии с таким же поведением ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ (5°).

(б) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^x}\right)$ при $x>1$ сходится (5°), а при $0<x\leq 1$ расходится к нулю (6°).

2) Докажем, что (при $\alpha>\beta>0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} = 0.$$

Для этого достаточно установить расходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

или [см. 6°] расходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}.$$

А это легко вытекает из сравнения написанного ряда с гармоническим.

Этот пример показывает, как иной раз действительно выгодно сводить разыскание предела последовательности к исследованию бесконечного произведения, с использованием развитой для бесконечных произведений теории.

3) Приведем в заключение замечательный пример преобразования бесконечного произведения в ряд, принадлежащий Эйлеру. Если перенумеровать простые числа, в порядке возрастания:

$$p_1=2,\quad p_2=3,\quad p_3=5,\ \ldots,\ p_k,\ \ldots,$$

то при $x>1$ имеет место тождество

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)\cdot\ldots}=$$
$$=1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

или

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Имеем, по формуле для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=1+\frac{1}{p_k^x}+\frac{1}{(p_k^2)^x}+\ldots+\frac{1}{(p_k^m)^x}+\ldots$$

Если перемножить конечное число таких рядов, отвечающих всем простым числам, не превосходящим натурального числа N, то частичное произведение окажется равным

$$P_x^{(N)}=\prod_{p_k\le N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\sum_{n=N+1}^{\infty}{}'\,\frac{1}{n^x},\tag{8}$$

где штрих означает, что суммирование распространяется не на все натуральные числа, а лишь (не считая единицы) на те из них, которые в своем разложении на простые множители содержат только уже введенные прос-

тые числа (первые N натуральных чисел этим свойством, конечно, обладают). Отсюда и подавно

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ввиду сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ выражение справа, представляющее его остаток после N-го члена, стремится к 0 при $N \to \infty$; переходя к пределу, и получим требуемый результат.

Эта формула Эйлера впоследствии (1859 г.) была использована Риманом в его исследованиях относительно распределения простых чисел.

4) При $x = 1$ соотношение (8) еще сохраняет силу; отсюда

$$P_1^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = H_N,$$

так что при $N \to \infty$ на этот раз $P_1^{(N)} \to \infty$, т. е. произведение

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{p_k}\right) \cdot \ldots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

расходится и имеет значение $+\infty$.

В этом состоит данное Эйлером новое доказательство того, что множество простых чисел бесконечно (чем, по существу, в проведенном рассуждении мы не пользовались); ведь при конечности этого множества и произведение имело бы конечное значение. Если полученный результат переписать так:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{p_k}\right) \cdot \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0,$$

то, в связи с 5°, можно заключить о расходимости ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p_k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}.$$

Это важное предложение дает, сверх того, еще некоторую характеристику роста простых чисел; оно гораздо сильнее утверждения о расходимости гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ибо здесь речь идет лишь о части его членов!

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

252. Ряд Тейлора. Мы уже встречали в примерах степенные ряды вида:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

расположенные по степеням x.

Рассматривают и степенные ряды более общего вида:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots, \tag{2}$$

расположенные по степеням двучлена $x - x_0$ (вместо x). Такой ряд не разнится существенно от ряда вида (1), ибо приводится к нему простой заменой переменной: $x - x_0 = y$ (с точностью до обозначения переменной).

В последующем мы детально изучим свойства степенных рядов, которые во многом уподобляются многочленам. Отрезками степенного ряда являются многочлены, что делает степенные ряды удобным средством для приближенных вычислений. В связи со всем этим приобретает большую важность вопрос о возможности *наперед заданную функцию разложить по степеням* $x - x_0$ (в частности, по степеням x), т. е. представить ее в виде суммы ряда типа (2) [или (1)].

Мы займемся здесь подобным разложением по отношению к элементарным функциям, причем путь к решению поставленного вопроса нам открывает формула Тейлора, подробно изученная в n° **105—108**. В самом деле, предположим, что рассматриваемая функция $f(x)$ в промежутке $[x_0, x_0 + H]$ или $[x_0 - H, x_0]$ $(H > 0)$ имеет производные всех порядков (тем самым — непрерывные). Тогда, как мы видели в n° **106**, для всех значений x в этом промежутке имеет место формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \tag{3}$$

где дополнительный член $r_n(x)$ может быть представлен в одной из указанных в n° **106** форм. При этом n мы можем брать сколь угодно большим, т. е. доводить это разложение до сколь угодно высоких степеней $x - x_0$.

Это, естественно, приводит к мысли о бесконечном разложении:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (4)$$

Такой ряд — независимо от того, сходится ли он и имеет ли, на самом деле, своей суммой $f(x)$ — называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$. Он имеет вид (2), причем коэффициенты его:

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots$$

носят название *коэффициентов Тейлора*.

Так как разность между $f(x)$ и суммой $n+1$ членов ряда Тейлора, ввиду (3), есть как раз $r_n(x)$ то, очевидно: *для того, чтобы при некотором значении x действительно имело место разложение* (4), *необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член $r_n(x)$ формулы Тейлора — при этом значении x — стремился к* 0 *с возрастанием n:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \quad (5)$$

При исследовании вопроса, имеет ли место это равенство, и при каких именно значениях x, нам и будут полезны различные формы дополнительного члена $r_n(x)$, выявляющие его зависимость от n.

Чаще всего приходится иметь дело со случаем, когда $x_0=0$ и функция $f(x)$ разлагается в ряд непосредственно по степеням x:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ ^{*)}; \quad (6)$$

этот ряд имеет вид (1), с коэффициентами:

$$a_0=f(0),\quad a_1=\frac{f'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ \ldots,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots \quad (7)$$

Выпишем теперь подробнее дополнительный член $r_n(x)$ применительно именно к этому частному предположению: $x_0=0$ [n° 106] в форме Лагранжа:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \quad (8)$$

в форме Коши:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}(1-\theta)^n x^{n+1}. \quad (9)$$

---

*) Этот ряд обыкновенно называют *рядом Маклорена*.

При этом о множителе θ известно только то, что он содержится между 0 и 1, но он может меняться при изменении x или n (и даже — при переходе от одной формы к другой).

Перейдем к конкретным разложениям.

253. Разложение в ряд показательной и основных тригонометрических функций. Доказем сначала следующее простое предложение, которым сразу будет охвачен ряд важных случаев:

Если функция $f(x)$ *в промежутке* $[0, H]$ *или* $[-H, 0]$ $(H>0)$ *имеет производные всех порядков, и все эти производные при изменении* x *в указанном промежутке оказываются по абсолютной величине ограниченными одним и тем же числом:*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant L \tag{10}$$

(*где* L *не зависит от* n), *то во всем промежутке имеет место разложение* (6).

В самом деле, взяв дополнительный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа [см. (8)], имеем, в силу (10):

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant L \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При безграничном возрастании n выражение $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ стремится к 0 [n° **45**, 1)]; это [в силу n° **235**, 5°] следует и из сходимости ряда

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

[n° **239**, 2) (а)]. Но в таком случае и $r_n(x)$ имеет пределом 0, что и доказывает наше утверждение.

Это предложение непосредственно приложимо к функциям

$$f(x) = e^x, \ \sin x, \ \cos x$$

в любом промежутке $[-H, H]$, ибо производные их, соответственно равные

$$f^{(n)}(x) = e^x, \ \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

будут в нем по абсолютной величине ограничены числом e^H — для функции e^x, и единицей — для $\sin x$ и $\cos x$.

Так как коэффициенты Тейлора мы уже вычисляли для этих функций в n° **108**, 1) — 3), то можем сразу написать разложения:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots \tag{12}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + \ldots \tag{13}$$

Все они имеют место — ввиду произвольности H — при **любом** значении x.

254. Формулы Эйлера. Самый вид коэффициентов только что полученных замечательных разложений *подсказывает мысль о некоей связи между ними*, но — если оставаться в области вещественных чисел — установить такую связь невозможно. Эйлеру удалось осуществить это путем введения *степени с мнимым показателем*.

Хотя в излагаемом курсе рассматриваются лишь вещественные числа и вещественные переменные, но — отступая от этой основной линии — мы все же приведем здесь *формулы Эйлера*, выражающие тригонометрические функции от вещественного аргумента через показательную функцию от чисто-мнимого аргумента.

Если подставить (пока — чисто формально!) в (11), вместо вещественного числа x, мнимое число yi, то получим:

$$e^{yi} = 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \frac{(yi)^5}{5!} + \ldots =$$
$$= 1 + yi - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}\, i + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!}\, i + \ldots$$

или, отделяя вещественную часть от мнимой,

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right).$$

Выражения в скобках как раз и представляют собой известные уже нам [см. (13) и (12)] разложения функций $\cos y$ и $\sin y$. Итак,

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y. \tag{14}$$

Заменяя здесь y на $-y$, будем иметь аналогично

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$$

Почленное сложение и вычитание этих двух соотношений и приводит нас к знаменитым *формулам Эйлера*.

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) имеют в анализе широкое применение.

Обратимся к логическому осмыслению сказанного *). Начнем с рассмотрения комплексной переменной $z_n = x_n + iy_n$, зависящей от натурального указателя n. Определение предела ее дается в тех же терминах, что и для вещественного случая [n° **28**]: *комплексное число $c = a + ib$ называется пределом переменной z_n, если, каково бы ни было положительное число ε, всегда найдется такой номер N, что для $n > N$ выполняется неравенство $|z_n - c| < \varepsilon$* **).

Так как

$$|z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2},$$

---

*) С учетом того, что с комплексными числами и с комплексной переменной читатель уже знаком из курса высшей алгебры.

**) Здесь $|\alpha + i\beta|$ обозначает «модуль» комплексного числа $\alpha + i\beta$, равный $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

то сразу ясно, что $z_n \to c$ *в том и только в том случае, если для вещественных и мнимых составляющих* x_n *и* y_n *по отдельности имеем:* $x_n \to a$ *и* $y_n \to b$.

Рассмотрим теперь комплексный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n. \tag{C}$$

Он называется *сходящимся*, если его частичная сумма

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$$

с возрастанием n стремится как к пределу к некоторому комплексному числу C — *сумме ряда*. Разлагая все упомянутые здесь числа на вещественную и мнимую составляющие:

$$C = A + iB, \quad c_n = a_n + ib_n, \quad C_n = A_n + iB_n,$$

причем

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

из предшествующего замечания заключаем, что

$$C_n \to C \text{ одновременно с } A_n \to A, \ B_n \to B,$$

т. е. сходимость комплексного ряда (C) к сумме C равносильна сходимости, порознь, вещественных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (A) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (B),$$

соответственно, к суммам A и B. Отсюда, в частности, вытекает, что сходящиеся комплексные ряды — подобно вещественным — обладают с о ч е т а т е л ь н ы м свойством [n° 245].

Если сходится ряд $\sum_{1}^{\infty} |c_n|$, составленный из модулей ряда (C), то, ввиду неравенств

$$|a_n| \leqslant |c_n|, \quad |b_n| \leqslant |c_n|,$$

сходятся и ряды

$$\sum_{1}^{\infty} |a_n|, \quad \sum_{1}^{\infty} |b_n|,$$

откуда вытекает сходимость рядов (A) и (B) [n° 243], а следовательно — и ряда (C). В этом случае ряд (C) называется *абсолютно сходящимся*. Например, ряд

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{16}$$

при любом комплексном значении z абсолютно сходится, ибо сходится вещественный ряд модулей его членов

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \ldots + \frac{|z|^n}{n!} + \ldots$$

Абсолютно сходящийся ряд (C) обладает переместительным свойством, потому что этим свойством обладают ряды (A) и (B) [n° **246**]. Наконец, на комплексные абсолютно сходящиеся ряды распространяется и теорема об умножении [n° **248**]; доказательство, данное для вещественного случая — после сделанных замечаний — здесь может быть повторено дословно.

Поставим теперь в общем виде вопрос об определении степени e^z при комплексном z. В том случае, когда z есть вещественное число, x, эта степень уже была определена; в предыдущем номере мы доказали, что для нее имеет место разложение (11). В случае мнимого показателя z степень e^z еще не определена; подражая упомянутому разложению, мы на этот раз по определению полагаем e^z равной сумме ряда (16) (заведомо существующей!). Очень важно, что при этом *сохраняется основное свойство показательной функции*

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'},$$

в чем легко убедиться, перемножая ряды, дающие e^z и $e^{z'}$ [ср. n° **243**, 2)].

Таким образом, заменяя выше в разложении (11) x на yi, мы попросту использовали указанное расширение понятия степени.

Отметим в заключение, что, если $z = x + yi$, то по правилу показателей $e^z = e^x \cdot e^{yi}$ так что, с учетом (14), окончательно:

$$e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{17}$$

255. Разложение арктангенса. К функции $y = \operatorname{arctg} x$ доказанное выше [n° **253**] общее предложение уже неприложимо. Действительно, выражение для ее n-й производной, найденное в n° **96**, 5):

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \tag{18}$$

не гарантирует существования общей границы для всех $y^{(n)}$!

Так как соответствующий ряд Тейлора (см. n° **108**, 6)]

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots$$

сходится лишь в промежутке $[-1, 1]$ *), то вне этого промежутка не приходится уже говорить о выражении функции $\operatorname{arctg} x$ этим рядом. Наоборот, для $|x| \leqslant 1$ имеем по формуле Лагранжа (8) [с учетом (18) и полагая $y_\theta = \operatorname{arctg} \theta x$]

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\left|\cos^{n+1} y_\theta \cdot \sin (n+1)\left(y_\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1} |x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда ясно, что $r_n(x) \to 0$, так что для всех значений x в промежутке $[-1, 1]$ имеет место разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots \tag{19}$$

---

*) По признаку Даламбера [n° **243**] легко убедиться, что ряд (абсолютно) сходится, если $|x| < 1$, и расходится при $|x| > 1$. Сходимость (неабсолютная) при $x = \pm 1$ вытекает из теоремы Лейбница [n° **244**].

Мы еще раз подчеркиваем, что, хотя $\operatorname{arctg} x$ и вне этого промежутка имеет определенный смысл, но разложение (19) там уже не действительно, поскольку ряд не имеет суммы.

Из ряда (19) при $x=1$, в частности, получается знаменитый *ряд Лейбница*

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}+\ldots \qquad (20)$$

первый ряд, в истории анализа, представляющий разложение числа π.

256. Логарифмический ряд. Если в качестве функции $f(x)$ взять $\ln(1+x)$ $(x>-1)$, то соответствующий ряд Тейлора будет таков [n° **108**, 5)]:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Он сходится лишь для значений x в промежутке $(-1, 1]$ *); значит, только для этих значений и имеет смысл исследовать поведение дополнительного члена $r_n(x)$.

Возьмем его сначала в форме Лагранжа (8). Так как

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[n° **96**, 2)], то

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1).$$

Если $0\leqslant x\leqslant 1$, то последний множитель не превосходит единицы и отсюда

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}, \text{ так что } r_n(x)\to 0 \text{ (при } n\to\infty).$$

Но при $x<0$ поведение этого множителя становится неясным, и приходится прибегнуть к форме Коши дополнительного члена [см. (9)].

Имеем

$$r_n(x)=(-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1),$$

так что

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

---

*) И здесь абсолютная сходимость при $|x|<1$ и расходимость при $|x|>1$ устанавливается с помощью признака Даламбера. При $x=1$ налицо (неабсолютная) сходимость по теореме Лейбница, а при $x=-1$ получается расходящийся гармонический ряд с измененными знаками.

Так как при $x > -1$ будет $1 + \theta x > 1 - \theta$, то последний множитель меньше единицы; следовательно, лишь только $|x| < 1$, заведомо $r_n(x) \to 0$.

Любопытно, что, хотя форма Коши вполне исчерпывает вопрос для всех значений x между -1 и 1, она ничего не дает при $x = 1$; в этом случае мы получаем

$$|r_n(1)| < (1-\theta)^n,$$

но ввиду возможности для θ меняться вместе с n, нельзя заключить о том, что $(1-\theta)^n \to 0$.

Итак, по совокупности, для всех значений x в промежутке $(-1, 1]$, действительно будет

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \tag{21}$$

В частности, при $x = 1$ получаем уже знакомый нам ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \tag{22}$$

Из ряда (21) можно вывести и другие полезные разложения. Например, заменяя в нем x на $-x$ (при этом мы считаем $|x| < 1$) и вычитая полученный ряд почленно из ряда (21), придем к следующему ряду:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \ldots + \frac{1}{2m+1}x^{2m} + \ldots\right). \tag{23}$$

Положим здесь $x = \frac{1}{2n+1}$, где n — произвольное натуральное число. Так как тогда

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n},$$

то мы получим разложение

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right], \tag{24}$$

которое нам понадобится при вычислении логарифмов [n° **262**].

257. Формула Стирлинга. В качестве другого приложения разложения (24) покажем, как с его помощью может быть выведена одна важная формула анализа, носящая имя Стирлинга *).

С этой целью перепишем разложение (24) в виде:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots$$

---

*) Джемс Стирлинг (1692—1770) — английский математик. Приводимая ниже формула была им опубликована в 1730 г.

Это выражение, очевидно, больше единицы, но меньше, чем

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\dots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

Итак, имеем

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

откуда, потенцируя, найдем

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Введем теперь такую функцию от натурального указателя n:

$$a_n=\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

и из предыдущих неравенств следует, что

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}$$

так что, с одной стороны, $a_n>a_{n+1}$, с другой же,

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Таким образом, с возрастанием n переменная a_n убывает (оставаясь ограниченной снизу, например, нулем), и стремится к конечному пределу a, переменная же $a_ne^{-\frac{1}{12n}}$ возрастает, стремясь, очевидно, к тому же пределу a (ибо $e^{-\frac{1}{12n}}\to 1$). Так как, при любом n, выполняются неравенства

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

то найдется такое число θ, заключенное между нулем и единицей, что

$$a=a_n\cdot e^{-\frac{\theta}{12n}}\quad\text{или}\quad a_n=a\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

(Заметим, что число θ, вообще говоря, зависит от n.) Вспоминая определение переменной a_n, находим:

$$n!=a\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\qquad(0<\theta<1).\tag{25}$$

Остается теперь определить величину постоянной a. С этой целью вспомним формулу Валлиса [n° 188], которую можно записать в виде:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n!!}{(2n-1)!!}.$$

Последний множитель преобразуем следующим образом:

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{2n!};$$

подставив сюда вместо $n!$ выражение

$$\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot a_n,$$

а вместо $2n!$ аналогичное выражение

$$\sqrt{2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot a_{2n},$$

после элементарных упрощений получим

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}}\cdot\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{a}{2},$$

так что $a = \sqrt{2\pi}$.

Подставляя это значение a в формулу (25), мы и придем к *формуле Стирлинга*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0<\theta<1).$$

Если отбросить последний множитель, то получится приближенная формула*)

$$n! \doteq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

позволяющая вычислять величину факториала $n!$ при больших значениях n. Отброшенный же множитель дает возможность легко оценивать допущенную относительную погрешность, которая, очевидно, меньше $e^{\frac{1}{12n}} - 1$.

Формула Стирлинга часто применяется в теории вероятностей и статистике.

258. Биномиальный ряд. Возьмем, наконец, $f(x) = (1+x)^m$, где m — любое вещественное число, отличное от 0 и от всех натуральных чисел (при натуральном m получается известное конечное разложение по формуле Ньютона). В этом случае ряд Тейлора имеет вид [n° **108**, 4)]:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n + \ldots;$$

*) Ее, собственно, и установил Стирлинг.

его называют *биномиальным рядом*, а коэффициенты его — *биномиальными коэффициентами*. При сделанных относительно m предположениях ни один из этих коэффициентов не будет нулем (наоборот, если бы m было натуральным числом, то коэффициент при x^{m+1} и все следующие обратились бы в нуль). С помощью признака Даламбера [n° **243**] легко установить, что при $|x|<1$ биномиальный ряд абсолютно сходится, а при $|x|>1$ расходится. Исследование дополнительного члена $r_n(x)$ мы будем производить в предположении, что $|x|<1$, причем сразу возьмем его в форме Коши (9) [форма Лагранжа и здесь дает ответ не при всех интересующих нас значениях x!].

Так как

$$f^{(n+1)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

то дополнительный член

$$r_n(x)=\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Представим его, перегруппировав множители, в виде:

$$r_n(x)=\frac{(m-1)(m-2)\dots(\overline{m-1}-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n\cdot mx(1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Первое из этих трех выражений представляет собой общий член биномиального же ряда, но отвечающего показателю $m-1$; так как при $|x|<1$ биномиальный ряд сходится, каков бы ни был показатель, то это выражение при $n\to\infty$ стремится к нулю. Что же касается двух других выражений, то второе по абсолютной величине содержится между границами

$$|mx|\cdot(1-|x|)^{m-1} \quad \text{и} \quad |mx|\cdot(1+|x|)^{m-1},$$

не зависящими от n, а третье, как и в n° **256**, меньше единицы. Таким образом, $r_n(x)\to 0$, т. е. для $|x|<1$ имеет место разложение

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots, \qquad (26)$$

которое также связано с именем Ньютона.

Мы не касались вопроса о применимости его при значениях $x=\pm 1$, так как его решение требует кропотливого исследования дополнительного члена. Ограничимся указанием, что при $x=1$ разложение (26) имеет место для $m>-1$, а при $x=-1$ для $m>0$.

Отметим некоторые частные случаи биномиального ряда, отвечающие, например, $m=-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^n+\ldots \quad (-1<x<1)$$

(обыкновенная геометрическая прогрессия), затем,

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n+\ldots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^n+\ldots \quad (-1<x\leqslant 1).$$

Важно подчеркнуть, что в случае рационального m сумма биномиального ряда дает всегда арифметическое значение радикала.

259. Замечание об исследовании дополнительного члена. В рассмотренных выше примерах разложения функций в ряд Тейлора всегда оказывалось, что для всех значений x, при которых ряд сходился, его сумма равнялась именно исходной функции. Поэтому у читателя могло возникнуть подозрение, что вообще достаточно установить сходимость ряда, даже не проверяя соотношения (5):

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0,$$

чтобы уже было обеспечено разложение (4) или (6) (стр. 51).

На деле, однако, это не так. Рассмотрим, вместе с Коши, в виде примера функцию, определяемую равенствами

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{при } x\neq 0), \quad f(0)=0.$$

При $x\neq 0$ она имеет производные всех порядков

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots$$

и, вообще,

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n=1, 2, 3, \ldots), \tag{27}$$

где $P_n(z)$ есть целый относительно z многочлен (степени $3n$). В общности этого закона легко убедиться по методу математической индукции.

Установим теперь, что и в точке $x=0$ для нашей функции существуют производные всех порядков, причем все равны нулю*). Действительно, прежде всего,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0 \quad \text{при} \quad x\to 0,$$

так что $f'(0)=0$**). Допустим, что доказываемое утверждение верно для всех производных до n-го порядка включительно. Тогда [см. (27)]

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}\cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0 \quad \text{при} \quad x\to 0,$$

поскольку числитель представляет собой сумму членов вида $\frac{c}{x^m}$. Значит, и $f^{(n+1)}(0)=0$. По методу математической индукции утверждение оправдано полностью.

Ряд Маклорена (6) для этой функции — со сплошь нулевыми коэффициентами, конечно, сходится при всех значениях x, но ни при одном из этих значений (кроме $x=0$) не воспроизводит исходной функции.

Таким образом, предварительное определение области сходимости ряда Тейлора имеет лишь вспомогательное назначение: оно позволяет иной раз наперед исключить из рассмотрения те значения x, для которых отрицательный результат наперед ясен, поскольку ряд расходится. В тех же точках, где ряд сходится, только исследование дополнительного члена формулы Тейлора дает возможность доказать, что суммой ряда Тейлора будет именно исходная функция.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

260. Постановка вопроса. На примере полученных нами конкретных разложений мы разъясним, как бесконечные ряды могут быть использованы для целей приближенных вычислений. Предпошлем ряд общих замечаний.

Если число A разложено в ряд:

$$A=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — удобные (обыкновенно, рациональные) числа, и мы положим приближенно:

$$A\doteq A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,$$

---

*) Заметим попутно, что Лагранж считал невозможным, чтобы функция (не равная тождественно нулю) обращалась в какой-либо точке в нуль вместе со всеми своими производными. Коши построил свой пример именно для опровержения этого мнения Лагранжа.

**) Это вытекает из общего замечания (которое следует иметь в виду и дальше), что, каков бы ни был показатель $\mu>0$,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^\mu}{e^z}=0$$

[см. n° 121, 4)]. Здесь роль z играет $\frac{1}{x^2}$ (при $x\to 0$).

то поправка на отбрасывание всех остальных членов выразится остатком

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

При достаточно большом n эта погрешность станет сколь угодно малой, так что A_n воспроизведет A с любой наперед заданной точностью.

Мы заинтересованы в возможности просто производить оценку остатка α_n; это позволило бы нам и во-время остановиться при вычислении последовательных частичных сумм, когда уже будет получено приближение требуемой точности.

Если рассматриваемый ряд оказывается знакопеременным и притом с монотонно убывающими по абсолютной величине членами («лейбницевского типа»), то, как мы видели [n° 244, замечание], остаток имеет знак своего первого члена и по абсолютной величине меньше его. Эта оценка в смысле простоты не оставляет желать лучшего.

Несколько сложнее обстоит дело в случае положительного ряда. Тогда обыкновенно стараются найти положительный же ряд с бо́льшими членами, который бы легко суммировался: $\sum_{1}^{\infty} a'_n$, $a'_n \geqslant a_n$, и в качестве оценки для остатка α_n берут величину остатка α'_n этого нового ряда: $\alpha_n \leqslant \alpha'_n$. Например, для ряда $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ можно получить:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n},$$

а для ряда $1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m!}$:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot \ldots \cdot m} < \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!\,n}$$

[этой оценкой мы фактически и пользовались при вычислении числа e в n° 49].

Обыкновенно ищется десятичное приближение числа A, в то время как члены ряда могут и не быть выражены десятичными дробями. При обращении их в десятичную дробь округление служит источником новой погрешности, которую также следует учесть.

Наконец, отметим, что далеко не всякий ряд, имеющий суммой интересующее нас число A, пригоден для фактического вычисления этого числа (даже если его члены просты, и оценка остатка производится легко). Вопрос — в быстроте сходимости, т. е. в быстроте приближения частичной суммы к числу A.

Возьмем для примера ряды [см. n° 255, (20) и n° 256, (22)]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

дающее соответственно разложение чисел $\frac{\pi}{4}$ и $\ln 2$. Они сходятся очень медленно, и для того, чтобы с их помощью найти приближенные значения этих чисел с высокой точностью, нужно было бы сложить огромное количество членов. Ниже мы без особого труда найдем десятичные приближения упомянутых чисел с большой точностью, использовав более подходящие ряды.

261. Вычисление числа π. Воспользуемся известным рядом для арктангенса [n° **255**, (19)]:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Если взять $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$, и мы получим ряд

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots\right),$$

уже пригодный для вычисления.

Существуют, однако, ряды гораздо более удобные для вычисления числа π. Положим $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Ввиду близости этого числа к 1, ясно, что угол 4α близок к $\frac{\pi}{4}$; положив $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}, \text{ так что } \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Отсюда получается такая формула:

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9} - \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}} + \ldots\right\} - 4\left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \ldots\right\}.$$

Вычислим по ней число π с семью знаками после запятой. Для этого достаточно тех членов формулы, которые фактически выписаны. Так как оба ряда — типа Лейбница, то поправки в уменьшаемом и вычитаемом на отбрасывание невыписанных членов, соответственно, будут:

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{13\cdot 5^{13}} < \frac{1}{10^8} \quad \text{и} \quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5\cdot 239^5} < \frac{1}{10^8}.$$

Сохраненные члены обратим в десятичные дроби, округляя их (по правилу дополнения) на восьмом знаке. Вычисления сведены в таблицу (+ или — в скобках указывает **знак** поправки):

$$\frac{16}{5} = 3,20000000 \qquad \frac{16}{3\cdot 5^3} = 0,04266667\,(-)$$

$$+\frac{16}{5\cdot 5^5} = 0,00102400 \qquad +\frac{16}{7\cdot 5^7} = 0,00002926\,(-)$$

$$\frac{16}{9\cdot 5^9} = 0,00000091\,(+) \qquad \frac{16}{11\cdot 5^{11}} = 0,00000003\,(-)$$

$$3,20102491 \qquad 0,04269596$$

$$-\begin{array}{r}3,20102491\\0,04269596\\\hline 3,15832895\end{array} \qquad -\begin{array}{r}\frac{4}{239} = 0,01673640\,(+)\\ \frac{4}{3\cdot 239^3} = 0,00000010\,(-)\\\hline 0,01673630\end{array}$$

Учитывая все поправки, имеем:

$$3,15832895 < 16\alpha < 3,15832898$$

$$-0,01673632 < -4\beta < -0,01673630,$$

так что

$$3,14159263 < \pi < 3,14159268.$$

Итак, окончательно, $\pi = 3,1415926\ldots$, причем все выписанные знаки верны.

262. Вычисление логарифмов. В основе вычисления лежит ряд (24) n° 256:

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n =$$

$$= \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right]. \quad (1)$$

При $n = 1$ получим разложение для $\ln 2$:

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^4} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{9^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9^6} + \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{9^7} + \frac{1}{17}\cdot\frac{1}{9^8} + \ldots\right).$$

Этот ряд вполне пригоден для вычислений. Покажем, например, что, ограничиваясь лишь выписанными членами, можно найти $\ln 2$ с девятью правильными десятичными знаками.

В самом деле, если отбросить члены этого ряда, начиная с десятого, то соответствующая поправка будет:

$$\Delta = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{9^9} + \frac{1}{21}\cdot\frac{1}{9^{10}} + \ldots\right) < \frac{2}{3\cdot 19\cdot 9^9}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{12\cdot 19\cdot 9^8} < \frac{2}{10^{10}}.$$

Вычисления, на 10 знаков, сведены в таблицу:

$$\frac{2}{3} = 0{,}66666\ 66667\ (-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 3\cdot 9} = 0{,}02469\ 13580\ (+)$$
$$\frac{2}{3\cdot 5\cdot 9^2} = 0{,}00164\ 60905\ (+)$$
$$\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9^3} = 0{,}00013\ 06421\ (+)$$
$$\frac{2}{3\cdot 9\cdot 9^4} = 0{,}00001\ 12901\ (-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 11\cdot 9^5} = 0{,}00000\ 10264\ (-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 13\cdot 9^6} = 0{,}00000\ 00965\ (-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 15\cdot 9^7} = 0{,}00000\ 00093\ (-)$$
$$\frac{2}{3\cdot 17\cdot 9^8} = 0{,}00000\ 00009\ (+)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad 0{,}69314\ 71805}$$

Учитывая все поправки, имеем:

$$0{,}6931471802 < \ln 2 < 0{,}6931471809,$$

так что

$$\ln 2 = 0{,}693147180\ldots,$$

и все написанные 9 знаков верны.

Полагая теперь в (1) $n = 4$, найдем:

$$\ln 5 = 2\ln 2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{81} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81^2} + \ldots\right).$$

Пользуясь уже вычисленным значением $\ln 2$, по этой формуле легко вычислить $\ln 5$, а затем и $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$. После этого, с произвольной степенью точности, может быть вычислен модуль

$$M = \frac{1}{\ln 10}$$

для перехода от натуральных логарифмов к десятичным; он равен $M = 0{,}434294481\ldots$ Умножив на модуль, найдем десятичные логарифмы: $\log 2$ и $\log 5$.

Перейдем к десятичным логарифмам и в основной формуле (1):

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2M}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right]. \qquad (2)$$

Полагая здесь $n=80=2^3\cdot 10$ и принимая во внимание, что $n+1=$ $=81=3^4$, найдем

$$4\log 3-3\log 2=\frac{2M}{161}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25921}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25921^2}+\ldots\right)+1$$

откуда легко найти $\log 3$. Полагая, далее, в формуле (2) $n=2400=3\cdot 2^3\cdot 10^2$, будем иметь $n+1=2401=7^4$ и

$$4\log 7-3\log 2-\log 3-2=\frac{2M}{4801}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{23049601}+\ldots\right),$$

так что найдем и $\log 7$. Подбирая подобные числовые комбинации, можно с произвольной степенью точности найти логарифмы простых чисел, а по ним путем умножения на натуральные множители и сложения найдутся логарифмы составных чисел.

Можно было бы поступить и иначе, непосредственно вычисляя логарифмы последовательных натуральных чисел и переходя от $\log n$ к $\log(n+1)$ при помощи формулы (2). Так, для вычисления логарифмов чисел от 1000 до 10 000, возьмем в формуле (2) только один член, т. е. приближенно положим

$$\log(n+1)-\log n=\frac{2M}{2n+1}\qquad(10^3\leqslant n\leqslant 10^4).$$

Поправка при этом будет

$$\Delta=\frac{2M}{2n+1}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right]<$$
$$<\frac{2M}{3(2n+1)^3}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{2M}{3(2n+1)\cdot 2n\cdot(2n+2)}<\frac{2M}{24n^3}.$$

Так как у нас $n\geqslant 10^3$, а $2M<1$, то

$$\Delta<\frac{1}{24\cdot 10^9}<\frac{1}{2\cdot 10^{10}}.$$

Если бы даже все ошибки суммировались, то в общем все же погрешность была бы меньше, чем $\frac{10^4}{2\cdot 10^{10}}=\frac{1}{2\cdot 10^6}$. Но легко избегнуть такого накопления погрешностей, вычислив целый ряд контрольных логарифмов по первому методу. Таким путем можно достигнуть гораздо большей точности, сохранив в то же время присущий второму методу *автоматизм* вычислений, который очень ценен, особенно при составлении обширных таблиц.

ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

263. Вводные замечания. Мы изучали выше бесконечные последовательности и их пределы, бесконечные ряды и их суммы; элементами этих последовательностей или членами рядов были постоянные числа. Правда, иной раз в их состав и входили, в роли параметров, те или иные переменные величины, но во время исследования им неизменно приписывались определенные постоянные значения. Так, например, когда мы устанавливали, что последовательность

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)^1, \left(1+\frac{x}{2}\right)^2, \left(1+\frac{x}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \ldots$$

имеет пределом e^x, или что ряд

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

имеет суммой $\ln(1+x)$, для нас x было числом постоянным. Ф у н к ц и о н а л ь н а я п р и р о д а элементов последовательности и ее предела или членов ряда и его суммы нами вовсе не учитывалась; сейчас же именно к этому моменту будет привлечено наше внимание.

Предположим, что дана п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь, элементами которой являются функции

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x), \ldots \tag{1}$$

от одной и той же переменной x, определенные в некоторой области ее изменения $\mathscr{X}=\{x\}$ *). Пусть для каждого x из $\mathscr{X}$ эта последовательность имеет конечный предел; так как он вполне

*) Чаще всего это будет промежуток; но мы сохраняем пока наибольшую общность, разумея под $\mathscr{X}$ любое бесконечное числовое множество.

определяется значением x, то также представляет собою функцию от x в $\mathscr{X}$:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \tag{2}$$

которую мы будем называть предельной функцией для последовательности (1) или для функции $f_n(x)$.

Теперь мы будем интересоваться не одним лишь существованием предела в отдельных точках x, но и функциональными свойствами предельной функции — вопросами об ее непрерывности, об ее производной и интеграле.

Мы уже видели [n° **234**], что рассмотрение числового ряда и его суммы есть лишь другая форма исследования последовательности чисел и ее предела. Рассмотрим теперь ряд, членами которого являются функции от одной и той же переменной x в некоторой области $\mathscr{X}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{3}$$

Пусть этот ряд сходится при каждом значении x в $\mathscr{X}$; тогда его сумма также представит собой некоторую функцию от x: $f(x)$. Эта сумма определится предельным равенством вида (2), если под $f_n(x)$ разуметь частичную сумму

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x). \tag{4}$$

Обратно, вопрос о предельной функции для произвольно заданной последовательности (1) можно рассматривать под видом суммирования ряда (3), если положить

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \ldots$$
$$\ldots, u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \ldots$$

Нам чаще придется иметь дело именно с функциональными рядами, так как эта форма исследования предельной функции на практике обычно удобнее.

И здесь также следует подчеркнуть, что предметом наших ближайших исследований будут не одни лишь вопросы сходимости ряда (3), но и функциональные свойства его суммы, о которых мы упоминали выше.

Как оказывается, функциональные свойства предельной функции (суммы ряда) $f(x)$ существенно зависят не только от функциональных свойств функций $f_n(x)$ (или членов ряда), но и от самого характера приближения $f_n(x)$ к $f(x)$. Изучением типических возможностей, которые здесь представляются, мы прежде всего и займемся.

264. Равномерная и неравномерная сходимость. Допустим, что для всех x из $\mathscr{X}$ имеет место равенство (2). По самому определению предела это значит следующее: лишь только фиксировано значение x из $\mathscr{X}$ (для того чтобы иметь дело с определенной числовой последовательностью), по любому заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{5}$$

где под x разумеется именно то значение, которое было заранее фиксировано.

Если взять другое значение x, то получится другая числовая последовательность, и — при том же ε — найденный номер N может оказаться уже непригодным; тогда его пришлось бы заменить бо́льшим. Но x принимает бесконечное множество значений, так что пред нами бесконечное же множество различных числовых последовательностей, сходящихся к пределу. Для каждой из них в отдельности найдется свое N; возникает вопрос: существует ли такой номер N, который (при заданном ε) способен был бы обслужить одновременно все эти последовательности?

Покажем на примерах, что в одних случаях такой номер существует, а в других — его нет.

1) Пусть сначала

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Так как здесь

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{2n},$$

то сразу ясно, что для осуществления неравенства $f_n(x) < \varepsilon$ достаточно, каково бы ни было x, взять $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Таким образом, например, число $N = E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$ *) в этом случае годится для всех x одновременно.

2) Положим теперь:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

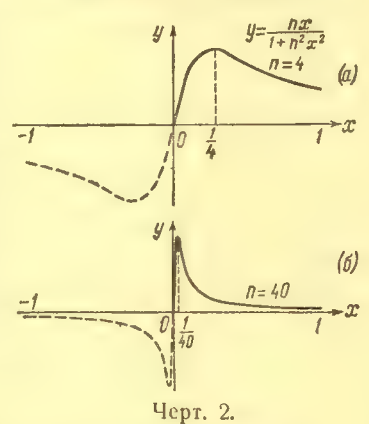
Для любого фиксированного $x > 0$ достаточно взять $n > E\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)$, чтобы было: $f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon$. Но, с другой стороны, сколь большим ни взять n, для функции $f_n(x)$ в промежутке $[0, 1]$ всегда найдется точка, именно точка $x = \frac{1}{n}$, в которой ее значение равно $\frac{1}{2}$: $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Таким образом, за счет увеличения n сделать $f_n(x) < \frac{1}{2}$

---

*) По поводу символа $E(x)$ см. т. I, стр. 41.

для всех значений x от 0 до 1 одновременно — никак нельзя. Иными словами, уже для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ не существует номера N, который годился бы для всех x одновременно.

На черт. 2 изображены графики этих функций, отвечающие $n = 4$ и $n = 40$: характерен горб высоты $\frac{1}{2}$, передвигающийся с возрастанием n справа налево. Хотя по каждой вертикали, в отдельности взятой, точки последовательных кривых с возрастанием n бесконечно приближаются к оси x, но ни одна кривая в целом не примыкает к этой оси на всем протяжении от $x = 0$ до $x = 1$.

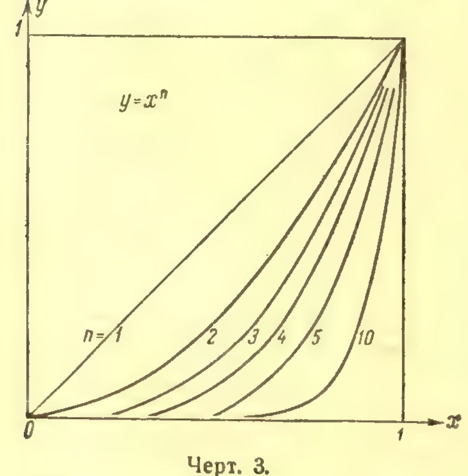


Черт. 2.

Иначе обстоит дело с функциями, рассмотренными на первом месте; мы не приводим их графиков, ибо они, например при $n = 4$ или $n = 40$, получаются из графиков, изображенных на черт. 2, путем уменьшения всех ординат, соответственно, в 4 или в 40 раз. В этом случае кривые сразу на всем своем протяжении примыкают к оси x.

Дадим теперь основное определение:

Если: 1) *последовательность* (1) *имеет в* $\mathscr{X}$ *предельную функцию* $f(x)$ и 2) *для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такой не зависящий от* x *номер* N, *что при* $n > N$ *неравенство* (5) *выполняется одновременно для всех* x *из* $\mathscr{X}$, *то говорят, что последовательность* (1) *сходится* [или—*функция* $f_n(x)$ *стремится*] *к функции* $f(x)$ *равномерно относительно* x *в области* $\mathscr{X}$.



Черт. 3.

Таким образом, в первом из приведенных примеров функция $f_n(x)$ стремится к нулю равномерно относительно x в промежутке $[0, 1]$, а во втором — нет.

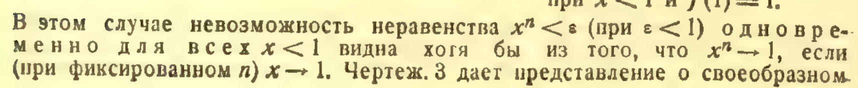
Рссмотрим дальнейшие примеры неравномерной сходимости.

3) Если

$$f_n(x) = x^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

то

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$



при $x < 1$ и $f(1) = 1$.

В этом случае невозможность неравенства $x^n < \varepsilon$ (при $\varepsilon < 1$) одновременно для всех $x < 1$ видна хотя бы из того, что $x^n \to 1$, если (при фиксированном n) $x \to 1$. Чертеж. 3 дает представление о своеобразном

характере нарушения равномерности: здесь предельная функция изменяется скачком, а горб неподвижен.

4) Пусть, наконец,

$$f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Невозможность равномерного приближения в $[0, 1]$ к предельной функции, которая здесь тождественно равна 0, следует хотя бы из того, что, при любом n,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{e}.$$

На этот раз высота горбов, которые мешают равномерному стремлению к 0, вдобавок еще бесконечно возрастает вместе с n.

Перенесем теперь все сказанное выше о сходимости функций на случай функционального ряда (3).

Предполагая ряд сходящимся, введем в рассмотрение его сумму $f(x)$, частичную сумму $f_n(x)$ [см. (4)] и, наконец, его остаток после n-го члена

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

При любом фиксированном x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Если частичная сумма $f_n(x)$ стремится к сумме ряда $f(x)$ равномерно относительно x в области $\mathscr{X}$ [или, что то же, остаток ряда $\varphi_n(x)$ равномерно стремится к нулю], то говорят, что ряд (3) *равномерно сходится в этой области.*

Это определение, очевидно, равносильно следующему:

Ряд (3), *сходящийся для всех x из области $\mathscr{X}$, называется равномерно сходящимся в этой области, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой независящий от x номер N, что при $n > N$ неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ или } |\varphi_n(x)| < \varepsilon \tag{6}$$

выполняется одновременно для всех x из $\mathscr{X}$.

Примеры равномерно и неравномерно сходящихся рядов можно составить, преобразовав приведенные выше примеры последовательностей. Мы присоединим к ним еще следующий простой пример.

5) Рассмотрим прогрессию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$; она сходится в открытом промежутке $\mathscr{X} = (1, -1)$. Для любого x из $\mathscr{X}$ остаток после n-го члена имеет вид:

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Если n произвольно фиксировать, то очевидно:

$$\lim_{x \to -1+0} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 1-0} \varphi_n(x) = \infty.$$

И то, и другое показывает, что осуществить, для всех x одновременно, неравенство

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \qquad \left(\text{если } \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$$

при одном и том же номере n — невозможно. Сходимость прогрессии в промежутке $(-1, 1)$ неравномерна; это же относится к промежуткам $(-1, 0]$ и $[0, 1)$ в отдельности.

265. Условие равномерной сходимости. Теорема Больцано—Коши [n° **52**], устанавливающая условие существования конечного предела для заданной числовой последовательности («принцип сходимости»), естественно приводит к следующему условию равномерной сходимости для заданной в области $\mathcal{X}$ последовательности функции (1):

Для того чтобы последовательность (1): 1) *имела предельную функцию и* 2) *сходилась к этой функции равномерно относительно x в области $\mathcal{X}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой не зависящий от x номер N, чтобы при $n > N$ и любом $m = 1, 2, 3, \ldots$ неравенство*

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

имело место для всех x из $\mathcal{X}$ одновременно.

[Требование это можно кратко сформулировать так: принцип сходимости для последовательности (1) должен осуществляться «равномерно» для всех x из $\mathcal{X}$.]

Доказательство. Необходимость. Если последовательность (1) имеет предельную функцию $f(x)$ и сходится к ней равномерно в $\mathcal{X}$, то по заданному $\varepsilon > 0$ найдется не зависящий от x номер N, такой, что при $n > N$ будет

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

для всех x. Аналогично и

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

а из этих обоих неравенств вытекает (7).

Достаточность. Пусть условие, указанное в теореме, выполнено. Тогда, какое бы значение x из $\mathcal{X}$ ни фиксировать, в лице последовательности (1) мы будем иметь числовую последовательность, для которой выполняется условие Больцано—Коши. Следовательно, для этой последовательности существует конечный

предел, чем доказано существование для последовательности (1) предельной функции $f(x)$.

Теперь, взяв по произволу $n > N$ и x из $\mathscr{X}$, станем в неравенстве (7) безгранично увеличивать m (при постоянных n и x). Переходя к пределу, получим:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Этим устанавливается равномерное стремление $f_n(x)$ к $f(x)$.

Нетрудно перефразировать доказанное условие для случая функционального ряда:

Для того чтобы ряд (3) *сходился равномерно в области* $\mathscr{X}$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существовал такой не зависящий от* x *номер* N, *что при* $n > N$ *и любом* $m = 1, 2, 3, \ldots$ *неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \tag{8}$$

имеет место для всех x *из* $\mathscr{X}$ *одновременно.*

Для установления на практике равномерной сходимости конкретных последовательностей или рядов пользуются более удобными в применении достаточными признаками, которые формулируются обычно для рядов.

Вот простейший и чаще всего применяемый признак:

Признак Вейерштрасса. *Если члены функционального ряда* (3) *удовлетворяют в области* $\mathscr{X}$ *неравенствам*

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9}$$

где c_n *суть члены некоторого сходящегося числового ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots, \tag{C}$$

то ряд (3) *сходится в* $\mathscr{X}$ *равномерно.*

При наличии неравенства (9) говорят, что ряд (3) мажорируется рядом (C), или что (C) служит мажорантным рядом для (3).

Действительно, из (9) получаем неравенство

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| \leqslant c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m},$$

справедливое одновременно для всех x из области $\mathscr{X}$. Согласно принципу сходимости, который мы применяем к числовому ряду (C), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ правая часть предыдущего неравенства будет уже меньше ε, а с нею — и левая, притом для всех x сразу. Отсюда, в силу доказанного выше условия, и вытекает наше утверждение.

Таким образом, например, в любом промежутке равномерно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

если только ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Ведь

$$|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leqslant |a_n|,$$

так что роль мажорантного здесь играет ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

§ 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СУММЫ РЯДА

266. Непрерывность суммы ряда. Мы переходим теперь к изучению функциональных свойств суммы ряда, составленного из функций, в связи со свойствами этих последних. Выше уже указывалось на эквивалентность точки зрения последовательностей и точки зрения бесконечных рядов. В изложении мы отдаем предпочтение последней точке зрения, потому что в приложениях встречаются почти исключительно именно бесконечные ряды. Перенесение сказанного о функциональных рядах на случай последовательностей функций не представляет затруднений.

Введенное выше понятие равномерной сходимости во всем дальнейшем будет играть решающую роль, так что важность его выявится с полной силой.

Начнем с вопроса о непрерывности суммы ряда, составленного из непрерывных функций. Читателю известно, что сумма конечного числа непрерывных функций — непрерывна [n° **62**]; справедливо ли подобное же утверждение и для случая бесконечного числа слагаемых? Следующий простой пример показывает, что это не всегда так.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x) + x(1-x) + \ldots + x^{n-1}(1-x) + \ldots$$

$$(0 \leqslant x \leqslant 1)$$

При $x=1$ все члены ряда, а с ними — и сумма ряда, обращаются в 0; при $x<1$, суммируя прогрессию, получаем 1. Хотя члены ряда непрерывны в промежутке $[0, 1]$, но сумма ряда в точке $x=1$ терпит разрыв! Отметим, что сходимость ряда здесь не равномерна, так как остаток ряда после n-го члена, равный x^n (для $x<1$), стремится к 0 неравномерно [n° **264**, 3)].

Имеет место

Теорема 1. *Если функции $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ определены и непрерывны в промежутке $\mathscr{X}=[a, b]$, и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

сходится в $\mathscr{X}$ равномерно к сумме $f(x)$, то и эта сумма будет непрерывна в промежутке $\mathscr{X}$.

Доказательство. Возьмем в промежутке $\mathscr{X}$ какую-либо точку x_0 и установим непрерывность функции $f(x)$ в этой точке. Сохраняя прежние обозначения, имеем при любом $n=1, 2, 3, \ldots$ и любом x из $\mathscr{X}$:

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \tag{2}$$

и, в частности,

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$

откуда

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)|. \tag{3}$$

Зададимся теперь произвольным $\varepsilon > 0$. Ввиду равномерной сходимости ряда можно фиксировать номер n так, чтобы неравенство

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

выполнялось для всех значений x в промежутке $\mathscr{X}$ (в том числе и для $x=x_0$). Отметим, что при фиксированном n функция $f_n(x)$ есть сумма определенного конечного числа функций $u_k(x)$, непрерывных в точке $x=x_0$. Поэтому она также непрерывна в этой точке, и по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|x-x_0| < \delta$ будет

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Тогда, ввиду (3), (4) и (5), неравенство $|x-x_0| < \delta$ влечет за собой

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему *).

Замечание. Мы видели на примере, что утверждение теоремы может оказаться неверным, если опустить требование равномерной сходимости ряда. Однако равномерная сходимость фигурирует в теореме, все

*) Фактически здесь доказано, что из непрерывности членов ряда в определенной точке следует непрерывность его суммы в этой же точке.

же лишь как достаточное условие, и не следует думать, что это условие необходимо для непрерывности суммы ряда. Например, ряды

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left[n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right],\\&\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

[ср. n°264, 4) и 2)] в промежутке [0, 1] имеют непрерывную сумму, тождественно равную нулю, хотя в указанном промежутке оба сходятся неравномерно.

Легко перефразировать доказанную теорему для случая последовательности функций:

Теорема 1*. *Если последовательность функций*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots,\qquad(7)$$

определенных и непрерывных в промежутке $\mathscr{X}=[a, b]$, сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно в $\mathscr{X}$, то и $f(x)$ непрерывна в $\mathscr{X}$.

267. Случай положительных рядов. Для рядов этого частного типа, как доказал Дини *), равномерная сходимость оказывается не только достаточным, но и необходимым условием непрерывности суммы ряда:

Теорема 2. *Пусть члены ряда* (1) *непрерывны в промежутке $\mathscr{X}=[a, b]$ и неотрицательны. Если ряд имеет сумму $f(x)$, также непрерывную в промежутке $\mathscr{X}$, то ряд сходится в этом промежутке равномерно.*

Доказательство. Рассмотрим остатки ряда (1):

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)=f(x)-f_n(x).$$

Функция $\varphi_n(x)$, как разность двух непрерывных функций, также непрерывна. Ввиду положительности членов ряда, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, при постоянном x, является убывающей (невозрастающей):

$$\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)\geqslant\ldots\geqslant\varphi_n(x)\geqslant\varphi_{n+1}(x)\geqslant\ldots$$

Наконец, поскольку ряд (1) сходится в промежутке $\mathscr{X}$, при любом постоянном x

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0.$$

*) Улисс Дини (1845—1918) — итальянский математик.

Для того чтобы установить равномерную сходимость ряда, достаточно доказать, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует хоть одно значение n, при котором $\varphi_n(x) < \varepsilon$ одновременно для всех x (ибо тогда для бо́льших значений n это неравенство выполнялось бы и подавно).

Доказательство этого будем вести от противного. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ такого номера n не существует. Тогда при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$ в промежутке $\mathscr{X}$ найдется такое значение $x = x_n$, что $\varphi_n(x_n) \geqslant \varepsilon$. К последовательности $\{x_n\}$, все элементы которой содержатся в конечном промежутке $\mathscr{X}$, применим лемму Больцано — Вейерштрасса [n° **51**] и выделим из нее частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к пределу x_0.

Ввиду непрерывности $\varphi_m(x)$, имеем:

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0),$$

каково бы ни было m. С другой стороны, при любом m, для достаточно больших k:

$$n_k \geqslant m, \text{ так что } \quad \varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, найдем, что

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon.$$

А это неравенство, имеющее место при любом m, противоречит тому, что

$$\lim_{m \to \infty} \varphi_m(x_0) = 0.$$

Теорема доказана.

Если перефразировать теорему Дини на случай последовательностей, то получится

Теорема 2*. *Пусть последовательность* (7) *непрерывных в промежутке* $\mathscr{X} = [a, b]$ *функций стремится при* $n \to \infty$ *к предельной функции* $f(x)$, *монотонно возрастая, так что*

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).$$

Если функция $f(x)$ *также непрерывна в* $\mathscr{X}$, то $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно в* $\mathscr{X}$

268. Почленный переход к пределу. Приведем еще одну теорему, которая является обобщением теоремы 1. В ней $\mathscr{X}$ есть произвольное бесконечное множество, имеющее точку сгущения a (конечную или нет) [n° **32**]; эта точка сама может и не принадлежать множеству $\mathscr{X}$.

Теорема 3. *Пусть каждая из функций $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ определена в области $\mathscr{X}$ и имеет, при стремлении x к a, конечный предел:*

$$\lim_{x \to \infty} u_n(x) = c_n. \tag{8}$$

Если ряд (1) *в области $\mathscr{X}$ сходится равномерно, то* 1) *сходится ряд, составленный из этих пределов:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C \tag{C}$$

и 2) *сумма ряда* (1), $f(x)$, *также имеет при $x \to a$ предел, именно:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = C. \tag{9}$$

Доказательство. Согласно условию равномерной сходимости n°**265**, для произвольно взятого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $n > N$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$ неравенство (8) на стр. 74 выполняется для всех x из $\mathscr{X}$. Переходя здесь к пределу при $x \to a$, с учетом (8), найдем, что

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m}| \leqslant \varepsilon,$$

так что для ряда (C) выполняется условие сходимости n°**242**.

Если C, C_n и γ_n означают, как обычно, его сумму, частичную сумму и остаток, то

$$C = C_n + \gamma_n.$$

Вычитая это равенство почленно из (2), легко получить:

$$|f(x) - C| \leqslant |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n|. \tag{10}$$

Ввиду равномерной сходимости ряда (1) и сходимости ряда (C), по любому $\varepsilon > 0$ можно фиксировать n столь большим, чтобы для всех x из $\mathscr{X}$ было:

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{а также} \quad |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

Так как, очевидно,

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k = C_n,$$

то — если ограничиться случаем конечного a — найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - a| < \delta$ будет:

$$|f_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

Тогда, при указанных значениях x, в силу (10), (11) и (12), будет выполняться неравенство

$$|f(x)-C|<\varepsilon,$$

что и приводит к (9) *).

Равенство (9) можно написать в форме [см. (8)]:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{\lim_{x\to a}u_n(x)\};$$

таким образом, при наличии равномерной сходимости, *предел суммы функционального ряда равен сумме ряда, составленного из пределов его членов*, или, иными словами, *в функциональном ряде допустим предельный переход «почленно»*.

Пример. В качестве примера применения этой общей теоремы изложим вывод известного читателю логарифмического ряда [n° **256**, (21)], исходя из биномиального ряда [n° **258**, (26)], с помощью предельного соотношения [n° **65**, 2)]

$$\ln a=\lim_{k\to\infty}k(\sqrt[k]{a}-1).$$

(По существу, именно так приходит к логарифмическому ряду Эйлер в своем «Введении в анализ», но, разумеется, без строгого обоснования!)

Положим $a=1+x$ (где $|x|<1$) и подставим вместо $(1+x)^{\frac{1}{k}}$ его разложение

$$(1+x)^{\frac{1}{k}}=1+\frac{1}{k}x+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots$$

Тогда $\ln(1+x)$ представится, как предел при $k\to\infty$ выражения

$$k[(1+x)^{\frac{1}{k}}-1]=x-\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{x^3}{3}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n-1)k}\right)+\ldots \quad (13)$$

Подчеркнем, что здесь x означает постоянное число. Члены этого ряда содержат, в качестве переменной, натуральный параметр k. Во всей области его изменения **) ряд (13) сходится равномерно, это

*) Читатель узнает в этом рассуждении то, которое уже было применено для доказательства теоремы 1.

**) Напомним, что область изменения $\mathscr{X}$ переменной x, о которой шла речь в теореме 3, могла быть какой угодно; в частности, она могла свестись и к множеству натуральных чисел с тем, что $a=+\infty$.

(по признаку Вейерштрасса) следует из того, что он мажорируется рядом

$$|x|+\frac{|x|^2}{2}+\frac{|x|^3}{3}+\ldots+\frac{|x|^n}{n}+\ldots \quad (x=\text{const},\ \ |x|<1),$$

уже не содержащим k. В таком случае, по теореме 3, в ряде (13) можно перейти к пределу при $k\to\infty$ почленно, что и приводит к логарифмическому ряду.

269. Почленное интегрирование рядов. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса об интегрировании суммы сходящегося функционального ряда.

Теорема 4. Если функции $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *непрерывны в промежутке* $\mathscr{X}=[a, b]$, *и составленный из них ряд* (1) *сходится в этом промежутке равномерно, то интеграл от суммы* $f(x)$ *ряда* (1) *представляется следующим образом:*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\\+\int_a^b u_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\ldots \tag{14}$$

Доказательство. Ввиду непрерывности функций $u_n(x)$ и $f(x)$ [n° 266, теорема 1] существование всех этих интегралов очевидно. Проинтегрировав тождество

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\varphi_n(x)$$

в промежутке $[a, b]$, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\\+\int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Таким образом, сумма n членов ряда (14) разнится от интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ дополнительным членом $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx$. Для доказательства разложения (14) нужно лишь установить, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx=0. \tag{15}$$

В силу равномерной сходимости ряда (1), для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $n > N$

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

сразу для всех x в рассматриваемом промежутке. Тогда для тех же значений n будет:

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\,\varepsilon,$$

что и доказывает предельное соотношение (15).

Равенство (14) может быть написано в виде

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_a^b u_n(x)\,dx\right\},$$

так что, в случае равномерно сходящегося функционального ряда, *интеграл от суммы ряда равен сумме ряда, составленного из интегралов его членов*, или, иными словами, *допустимо почленное интегрирование ряда*.

Замечание. Как и в случае теоремы 1, требование равномерной сходимости существенно для справедливости разложения (14), т. е. не может быть просто опущено, но все же не является необходимым. Ряды (6), рассмотренные в n° **266**, как раз и иллюстрируют это обстоятельство. Оба они в промежутке $[0,1]$ сходятся к функции $f(x)=0$ неравномерно. Но интегрируя первый почленно, мы в качестве суммы ряда интегралов получим

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2}) = 1,$$

хотя

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0;$$

для второго же ряда аналогично найдем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Пример. Поставим себе задачей разложить так называемый полный эллиптический интеграл первого рода

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

по степеням модуля k $(0 < k < 1)$.

Исходя из разложения $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ в биномиальный ряд [n° 258] и полагая в нем $x = -k^2 \sin^2 \varphi$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^{2n} \cdot \sin^{2n}\varphi.$$

Этот ряд сходится равномерно относительно φ, ибо мажорируется сходящейся прогрессией $1 + \sum_{n=1}^{\infty} k^{2n}$; следовательно, здесь допустимо почленное интегрирование по φ в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Выполнив его и используя известные интегралы [n° 187]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

получим

$$F(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2 \cdot k^{2n}\right\}.$$

Это разложение — особенно, при малых k — может быть применено к приближенным вычислениям.

Приведем аналог теоремы 4 для последовательностей:

Теорема 4*. *Если последовательность* (7) *функций, непрерывных в промежутке* $\mathscr{X} = [a, b]$, *сходится к предельной функции* $f(x)$ *равномерно в* $\mathscr{X}$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{16}$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\}\,dx,$$

так что предел, относящийся к интегралу, оказывается возможным отнести непосредственно к подинтегральной функции. В этом случае говорят, что *допустим предельный переход под знаком интеграла.*

В главе XVIII мы вернемся к этому вопросу в более общей постановке.

270. Почленное дифференцирование рядов. С помощью теоремы 4 предыдущего номера легко доказывается следующая

Теорема 5. *Пусть функции* $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ *определены в промежутке* $\mathscr{X}=[a, b]$ *и имеют в нем непрерывные производные* $u'_n(x)$. *Если в этом промежутке не только сходится ряд* (1), *но и равномерно сходится ряд, составленный из производных:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots, \tag{17}$$

то и сумма $f(x)$ *ряда* (1) *имеет в* $\mathscr{X}$ *производную, причем*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим через $f^*(x)$ сумму ряда (17); в силу теоремы 1, это будет непрерывная функция от x. Воспользовавшись теперь теоремой 4, проинтегрируем ряд (17) почленно в промежутке от a до произвольного значения x из $\mathscr{X}$; мы получим

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t)\,dt.$$

Но, очевидно, $\int_a^x u'_n(t)\,dt = u_n(x) - u_n(a)$, так что

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).$$

Так как интеграл слева, ввиду непрерывности подинтегральной функции, имеет производную, равную $f^*(x)$ [n° **183**, 12°], то ту же производную имеет и функция $f(x)$, которая от интеграла отличается лишь на постоянную.

Равенство (18) можно переписать (если воспользоваться, следуя Коши, обозначением D для производной) в виде

$$D\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x).$$

Таким образом, при указанных условиях, *производная от суммы ряда оказывается равна сумме ряда, составленного из производных его членов,* или, иными словами, *допустимо «почленное» дифференцирование ряда.*

Замечание. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} [e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}]$$

и

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) - \frac{1}{2(n-1)}\ln(1+(n-1)^2x^2)\right].$$

Первый из них сходится к 0 при $x=0$ и к 1 в остальных точках, а сумма второго везде равна 0. Если продифференцировать их почленно, то получатся уже знакомые нам ряды (6) n° **266**, сходящиеся во всем промежутке [0, 1] к 0, но оба — неравномерно. В первом случае ряд из производных сходится и при $x=0$, где сумма первоначального ряда производной иметь не может, ибо разрывна в этой точке. Во втором случае, наоборот, почленное дифференцирование повсюду приводит к верному результату. Этими примерами иллюстрируется роль требования, чтобы ряд производных сходился равномерно: оно существенно, но не необходимо.

Перефразировку теоремы 5 на случай функциональной последовательности предоставляем читателю.

Все эти теоремы о почленном предельном переходе, почленном интегрировании и дифференцировании устанавливают аналогию между функциональными рядами и суммами конечного числа функций. Аналогия эта, однако, ограничена известными условиями, в характеристике которых равномерная сходимость занимает исключительное место.

271. Пример непрерывной функции без производной. В заключение этого параграфа мы приведем, используя функциональный ряд, пример непрерывной функции, которая ни в одной точке не имеет конечной производной.

Первый пример такого рода принадлежит Вейерштрассу; он был опубликован в 1875 г.*); его функция определяется рядом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x,$$

где $0 < a < 1$, а b есть нечетное натуральное число $\left(\text{причем } ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right)$.

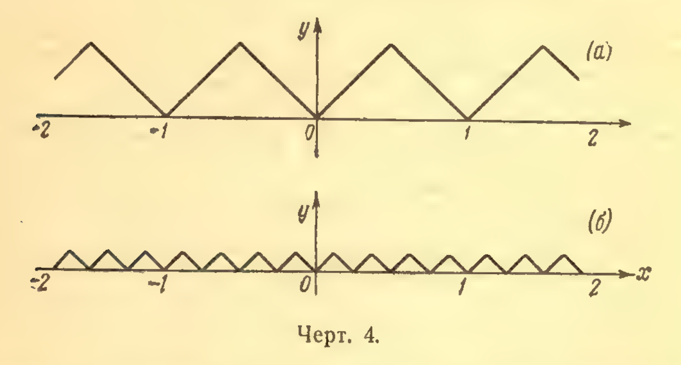
Этот ряд мажорируется сходящейся прогрессией $\sum_{0}^{\infty} a^n$, следовательно [n°**265**; **266**, теорема 1], сходится равномерно, и его сумма является всюду непрерывной функцией от x. Кропотливым исследованием Вейерштрассу удалось показать, что тем не менее ни в одной точке для нее не существует конечной производной.

---

*) Впрочем, и здесь его опередил Больцано, построивший подобную функцию ранее (1830 г.)

Мы приведем более простой пример ван-дер-Вардена, построенный по существу на той же идее: лишь колеблющиеся кривые $y = \cos \omega x$ заменены колеблющимися ломаными.

Итак, обозначим через $u_0(x)$ абсолютную величину разности между числом x и ближайшим к нему целым числом. Эта функция будет линейной в каждом промежутке вида $\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$, где s — целое; она непрерывна и



Черт. 4.

имеет период 1. Ее график представляет собой ломаную, он изображен на черт. 4*а*; отдельные звенья ломаной имеют угловой коэффициент ± 1.

Положим, затем, для $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

Эта функция будет линейной в промежутках вида $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$; она также непрерывна и имеет период $\frac{1}{4^k}$. Ее график также есть ломаная, но с более мелкими зубчиками; на черт. 4*б*, например, изображен график функции $u_1(x)$. Во всех случаях угловые коэффициенты отдельных звеньев ломаной и здесь равны ± 1.

Определим теперь, для всех вещественных значений x, функцию $f(x)$ равенством

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Так как, очевидно, $0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, так что ряд мажорируется сходящейся прогрессией $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$, то (как и в случае функции Вейерштрасса) ряд сходится равномерно, и функция $f(x)$ всюду непрерывна.

Остановимся на любом значении $x = x_0$. Вычисляя его с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$ (где $n = 0, 1, 2, \ldots$) по недостатку и по избытку, мы заключим его

между числами вида:

$$\frac{s_n}{2\cdot 4^n} \leqslant x_0 < \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n},$$

где s_n — целое. Очевидно, что замкнутые промежутки

$$\Delta_n = \left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n}, \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right] \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

оказываются вложенными один в другой. В каждом из них найдется такая точка x_n, что расстояние ее от точки x_0 равно половине длины промежутка:

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}};$$

ясно, что с возрастанием n переменная $x_n \to x_0$.

Составим теперь отношение приращений

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}.$$

Но, при $k>n$, число $\frac{1}{4^{n+1}}$ есть целое кратное периода $\frac{1}{4^k}$ функции $u_k(x)$, так что $u_k(x_n)=u_k(x_0)$, соответствующие члены ряда обращаются в 0 и могут быть опущены. Если же $k \leqslant n$, то функция $u_k(x)$, линейная в промежутке Δ_k, будет линейной и в содержащемся в нем промежутке Δ_n, причем

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0} = \pm 1 \quad (k=0, 1, \ldots, n).$$

Таким образом, имеем окончательно

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1);$$

иными словами, это отношение равно четному целому числу при нечетном n и нечетному целому числу при четном n. Отсюда ясно, что при $n \to \infty$ отношение приращений ни к какому конечному пределу стремиться не может, так что наша функция при $x=x_0$ конечной производной не имеет.

§ 3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И РЯДЫ МНОГОЧЛЕНОВ

272. Промежуток сходимости степенного ряда. Изложенная в предыдущем параграфе теория находит себе важное приложение при изучении свойств степенных рядов, расположенных либо просто по степеням переменной x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

либо же — в общем случае — по степеням двучлена $x - x_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \quad (2)$$

(a_0, a_1, $a_2, \ldots$ означают здесь постоянные коэффициенты). С подобными рядами в конкретных случаях мы уже не раз встречались (особо см. § 6 главы XV). Теперь же мы займемся изучением в общем виде, так сказать, самого этого аналитического аппарата для представления функций. Очевидно, можно ограничиться рядами (1), так как ряд (2) приводится к (1) заменой переменной.

Попытаемся прежде всего выяснить строение «области сходимости» степенного ряда, т. е. множества $\mathscr{X} = \{\bar{x}\}$ тех значений $x = \bar{x}$ переменной, для которых ряд (1) сходится. Путь к этому открывает следующая

Лемма. *Если ряд* (1) *сходится для значения* $x = \bar{x}$, *отличного от* 0, *то он абсолютно сходится для любого значения* x, *удовлетворяющего неравенству:* $|x| < |\bar{x}|$.

Из сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \ldots + a_n \bar{x}^n + \ldots$$

вытекает, что его общий член стремится к 0 [n° **235**, 5°], а следовательно, — ограничен [n° **36**, 5)]:

$$|a_n \bar{x}^n| \leqslant M \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \quad (3)$$

Возьмем теперь любое x, для которого $|x| < |\bar{x}|$, и составим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \quad (4)$$

Так как [см. (3)]:

$$|a_n x^n| = |a_n \bar{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n,$$

и члены ряда (4) оказываются меньшими соответствующих членов сходящейся геометрической прогрессии (со знаменателем $\left|\frac{x}{\bar{x}}\right| < 1$):

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^2 + \ldots + M \cdot \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n + \ldots,$$

то, по теореме 1 n° **237**, ряд (4) сходится. В таком случае, как мы знаем, ряд (1) сходится абсолютно, что и требовалось доказать.

При $x=0$ сходится, очевидно, всякий ряд (1). Но есть степенные ряды, которые — помимо этого — не сходятся ни при одном значении x. Примером такого «всюду расходящегося» ряда может служить ряд $\sum_{1}^{\infty} n!\, x^n$, как в этом легко убедиться с помощью признака Даламбера. Подобные ряды для нас не представляют интереса.

Предположим же, что для ряда (1) среди значений $\bar{x}$ переменной, при которых он сходится, есть и отличные от 0. Рассмотрим множество $\{|\bar{x}|\}$; оно либо ограничено сверху, либо нет.

В последнем случае, какое бы значение x ни взять, необходимо найдется такое $\bar{x}$, что $|x|<|\bar{x}|$, а тогда по лемме при взятом значении x ряд абсолютно сходится. Ряд оказывается «всюду сходящимся».

Пусть теперь множество $\{|\bar{x}|\}$ сверху ограничено, и R будет его точная верхняя граница (так что $0<R<\infty$). Если $|x|>R$, то это значение x заведомо разнится от всех $\bar{x}$, и ряд расходится. Возьмем теперь любое x, для которого $|x|<R$. По определению точной границы [n° 6], необходимо найдется такое $\bar{x}$, что $|x|<|\bar{x}|\leqslant R$; а это по лемме снова влечет за собой абсолютную сходимость ряда (1).

Таким образом, доказана общая

Теорема. *Для каждого степенного ряда* (1), *если только он не является всюду расходящимся, существует такое положительное число R (оно может быть и $+\infty$), что*

ряд абсолютно сходится для $|x|<R$,
и ряд расходится для $|x|>R$ (если $R<\infty$).

Это число R называется радиусом сходимости ряда.

Тем самым разрешен вопрос об «области сходимости» $\mathcal{X}$ ряда: она представляет собою сплошной промежуток от $-R$ до R; лишь о концах его нельзя сделать общего утверждения: как увидим из примеров, там может иметь место как сходимость (абсолютная или нет), так и расходимость. Промежуток $\mathcal{X}$ называется промежутком сходимости ряда.

Для всюду расходящегося ряда принимают $R=0$: его «промежуток сходимости» сводится к точке $x=0$.

Примеры. 1) Для ряда

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$R=\infty$, промежуток сходимости $(-\infty, +\infty)$ [n° 253].

2) В случае прогрессии

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$R=1$, промежуток сходимости $(-1, +1)$: оба конца не включаются.

3) Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

имеет $R=1$, промежуток сходимости $[-1, +1]$: оба конца включаются, но сходимость там неабсолютная [n° 255].

4) Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$R=1$, промежуток сходимости $(-1, +1]$: левый конец не включается, а на правом — ряд сходится неабсолютно [n° 256].

5) Наконец, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$$

здесь тоже $R=1$, промежуток сходимости $[-1, +1]$, ряд сходится абсолютно и на концах $\left(\text{ввиду сходимости ряда } \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$.

Все сказанное сохраняет силу и для общего ряда (2), лишь роль точки 0, играет точка x_0: промежуток сходимости простирается от x_0-R до x_0+R (со включением концов или нет, смотря по случаю).

Замечание. Если повторить изложенные соображения для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{1a}$$

расположенного по степеням комплексной переменной z, с комплексными же коэффициентами [n° 254], то окажется, что и для таких рядов теорема справедлива: для каждого ряда (1a) (если исключить всюду расходящиеся!) существует такое число R, $0<R\leqslant+\infty$, что для $|z|<R$ ряд абсолютно сходится, а для $|z|>R$ — расходится. Но на «комплексной плоскости» точки, для которых $|z|<R$, заполняют круг радиуса R (с центром в точке $z=0$); таким образом, здесь появляется круг сходимости (вместо промежутка сходимости), и становится понятным происхождение названия радиуса сходимости.

273. Непрерывность суммы степенного ряда. Пусть ряд (1) имеет радиус сходимости $R>0$. Прежде всего можно утверждать:

1°. *Какое бы положительное число $r<R$ ни взять, ряд* (1) *будет сходиться равномерно относительно x в замкнутом*

промежутке $[-r, r]$. Действительно, так как $r < R$, то при $x = r$ ряд (1) сходится абсолютно, т. е. сходится положительный ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n = |a_0| + |a_1| \cdot r + |a_2| \cdot r^2 + \ldots + |a_n| \cdot r^n + \ldots \quad (5)$$

При $|x| \leqslant r$ члены ряда (1) по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов этого ряда, который, таким образом, играет роль мажорантного ряда, и по признаку Вейерштрасса ряд (1) для указанных значений x сходится равномерно.

Хотя число r и может быть взято сколь угодно близким к R, но из доказанного все же не вытекает равномерная сходимость в промежутке $(-R, R)$: это видно хотя бы на примере прогрессии [n° **264**, 5)].

Теперь, как следствие теоремы 1, n° **266**, получаем:

2°. *Сумма $f(x)$ степенного ряда* (1) *внутри его промежутка сходимости представляет собой непрерывную функцию от x.*

Какое бы значение $x = x_0$ внутри промежутка сходимости, т. е. между $-R$ и R, ни взять, можно выбрать число $0 < r < R$ так, чтобы было $|x_0| < r$. Применив упомянутую теорему 1 в промежутке $[-r, r]$, ввиду 1°, установим непрерывность функции $f(x)$ в этом промежутке, следовательно, в частности, и при $x = x_0$.

[Обращаем внимание читателя на то, что мы избежали применения теоремы 1 в промежутке $(-R, R)$, где равномерная сходимость не может быть гарантирована.]

Непрерывность суммы степенного ряда может быть использована для доказательства теоремы о тождестве степенных рядов (напоминающей подобную же теорему для целых многочленов):

3°. *Если два степенных ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots$$

в окрестности точки $x = 0$ *) *имеют одну и ту же сумму, то эти ряды тождественны,* т. е. соответственные коэффициенты их попарно равны:

$$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \; a_2 = b_2, \; \ldots, \; a_n = b_n, \; \ldots$$

---

*) Здесь имеется в виду не только двусторонняя окрестность $(-\delta, \delta)$ точки $x = 0$, но и односторонняя окрестность вида $[0, \delta)$ или $(-\delta, 0]$.

Полагая $x=0$ в тождестве

$$a_0+a_1x+\ldots=b_0+b_1x+\ldots,$$

сразу убеждаемся в равенстве $a_0=b_0$. Отбрасывая эти члены в обеих частях написанного тождества и деля их на x (в этом случае мы вынуждены считать $x\neq 0$), получим новое тождество

$$a_1+a_2x+\ldots=b_1+b_2x+\ldots$$

Оно также имеет место в окрестности точки $x=0$, но исключая саму эту точку, так что безоговорочно положить в этом тождестве $x=0$ мы не имеем права. Лишь непрерывность сумм обоих рядов при $x=0$ позволяет нам заключить, что тождество все же выполняется и в исключенной точке, а тогда — полагая $x=0$ — получим, что $a_1=b_1$. Отбрасывая эти члены, деля на $x\neq 0$ и снова опираясь на непрерывность (как и только что), найдем, что $a_2=b_2$, и т. д. Общее утверждение оправдывается с помощью математической индукции.

Эта теорема, устанавливающая единственность разложения функции в степенной ряд, впервые была указана Эйлером.

274. Непрерывность на конце промежутка сходимости. Рассмотрим теперь более тонкий вопрос о поведении степенного ряда (1) вблизи одного из концов $x=\pm R$ его промежутка сходимости (считая R конечным). При этом мы можем ограничиться правым концом $x=R$; все сказанное о нем, с помощью простой замены x на $-x$, переносится и на случай левого конца $x=-R$.

В виде дополнения к теореме 2° о непрерывности суммы степенного ряда в открытом промежутке $(-R, R)$, имеет место

4°. ***Теорема Абеля****). *Если степенной ряд* (1) *сходится (хотя бы неабсолютно) при $x=R$, то его сумма $f(x)$ при этом значении непрерывна слева, т. е.*

$$f(R-0)=\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n.$$

Для доказательства можно было бы установить, что предположения теоремы влекут за собой равномерную сходимость ряда (1) в замкнутом промежутке $[0, R]$, а затем применить общую теорему 1 п° 266. Мы предпочитаем дать прямое доказательство.

Без умаления общности можно считать $R=1$ (к этому случаю вопрос сводится заменой x на Rx). Итак, зная, что сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A,$$

---

*) Нильс Генрик Абель (1802—1829) — знаменитый норвежский математик.

требуется доказать, что

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

С этой целью, считая впредь $0<x<1$, умножим по правилу Коши ряд (1) на прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};$$

мы получим

$$\frac{1}{1-x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad \text{где } A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

Вычтем теперь почленно ряды

$$A = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A x^n$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

Полагая $A - A_n = \alpha_n$, придем к тождеству

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n. \tag{6}$$

Так как $\alpha_n \to 0$ [n° 235, 2°], то по произвольно заданному $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что $|\alpha_n|<\frac{1}{2}\varepsilon$, лишь только $n>N$.

Разобьем сумму ряда в правой части (6) на две суммы

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n \quad \text{и} \quad (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Вторая оценивается сразу и независимо от x:

$$\left|(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n\right| \leqslant (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n|\, x^n < \frac{\varepsilon}{2}\cdot(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Что же касается первой, то она стремится к 0 при $x\to 1$, и при достаточной близости x к 1 будет

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

так что окончательно

$$\left|A-\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right|<\varepsilon,$$

что и доказывает высказанное утверждение.

Отсюда вытекает такое простое

Следствие. Если для функции $f(x)$, получено разложение в степенной ряд лишь в открытом промежутке

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (-R<x<R),$$

но функция определена и непрерывна, а ряд продолжает сходиться и на конце этого промежутка, скажем, *при $x=R$, то разложение остается верным и для $x=R$.*

В этом легко убедиться, переходя в написанном равенстве к пределу при $x \to R-0$.

275. Почленное интегрирование степенного ряда. По отношению к интегрированию и дифференцированию степенные ряды — в пределах их промежутка сходимости — ведут себя, как обыкновенные целые многочлены.

5°. *Степенной ряд* (1) *в промежутке* $[0, x]$, *где* $|x|<R$, *всегда можно интегрировать* *п о ч л е н н о,* так что — обозначая через $f(x)$ сумму ряда:

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\ldots \qquad (7)$$

Для доказательства возьмем r м е ж д у $|x|$ и R. В силу 1° ряд (1) сходится равномерно в промежутке $[-r, r]$, а тогда по теореме 4 n° **269** в промежутке $[0, x]$ ряд можно почленно интегрировать.

Проиллюстрируем многообразные приложения этой теоремы на п р и м е р а х.

1) Почленным интегрированием прогрессий

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}+\ldots$$

в промежутке $[0, x]$, где $|x|<1$, сразу получаются разложения

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,$$

которые в n° **257** и **256** были установлены гораздо более сложным путем. Так как первый ряд сходится при $x=1$, а второй — при $x=\pm 1$, то соответствующие разложения (по следствию из теоремы Абеля) имеют место и при этих значениях.

2) Возьмем известное нам разложение в ряд функции $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ [n° **258**] и заменим в нем x на $-x^2$ (считая $|x|<1$); в результате найдем, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^{2n} \qquad (-1<x<1).$$

Проинтегрируем теперь этот ряд почленно в промежутке $[0, x]$ $(-1<x<1)$; окончательно получим новое для нас разложение арксинуса:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

По следствию из теоремы Абеля [n° **274**], это разложение имеет место и на концах $x=\pm 1$ промежутка, поскольку ряд справа сходится и в этих точках [см., например, n° **240**].

3) Особую роль почленное интегрирование играет при разложении в бесконечные степенные ряды многих интегралов, не выражающихся через элементарные функции в конечном виде [n° **165**]. Например, исходя из известного разложения

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

[n° **253**, (11)], найдем

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = x-\frac{1}{1!}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

Подобные разложения с успехом могут быть использованы для приближенных вычислений и для составления таблиц значений интегралов, не выражающихся в конечном виде.

276. Почленное дифференцирование степенного ряда. 6°. *Степенной ряд* (1) *внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать* *почленно*, так что для суммы $f(x)$ ряда существует производная и выражается так:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \qquad (8)$$

Какое бы значение $x=x_0$, $-R<x_0<R$, ни взять, можно выбрать два числа r_0 и r так, чтобы было $|x_0|<r_0<r<R$.

Ввиду сходимости ряда (5) [n°273], его общий член ограничен:

$$|a_n| \cdot r^n \leqslant L \quad (n = 1, 2, 3, \ldots; L = \text{const}).$$

Тогда, при $|x| \leqslant r_0$,

$$n |a_n x^{n-1}| \leqslant n |a_n| \cdot r_0^{n-1} = n |a_n| \cdot r^{n-1} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} \leqslant L_0 \cdot n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots; L_0 = \frac{L}{r} = \text{const}),$$

так что члены ряда (8), для указанных значений x, не превосходят соответствующих членов мажорантного ряда

$$L_0 + L_0 \cdot 2\left(\frac{r_0}{r}\right) + L_0 \cdot 3\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 + \ldots + L_0 \cdot n\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-1} + \ldots,$$

в сходимости которого легко убедиться с помощью признака Даламбера (приняв во внимание, что $\frac{r_0}{r} < 1$). Поэтому в промежутке $[-r_0, r_0]$ ряд (8), составленный из производных членов ряда (1), сходится равномерно, и — по теореме 5 n°270 — почленное дифференцирование ряда (1) оправдано для всего промежутка $[-r_0, r_0]$ и, в частности, для точки $x = x_0$.

Замечание. Мы доказали в 5° и 6°, что ряды (7) и (8) сходятся в открытом промежутке $(-R, R)$, следовательно, их радиусы сходимости не меньше R. Но ведь, в свою очередь, ряд (1) получается почленным дифференцированием (7) и почленным интегрированием (8), так что и R не может быть меньше упомянутых радиусов сходимости. В совокупности из сказанного вытекает, что *радиусы сходимости всех трех рядов* (1), (7), (8) *равны между собой.*

Пример. Чтобы показать теорему 6° в действии, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$xu'' + u' + xu = 0$$

(простейший случай так называемого уравнения Бесселя*, часто встречающегося в математической физике и ее приложениях). Поставим себе задачей найти такое его решение u, которое разлагалось бы в ряд для всех x.

Напишем разложение искомой функции в виде ряда с неопределенными коэффициентами:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

* Фридрих Вильгельм Бессель (1784—1846) — немецкий астроном.

и, считая его всюду сходящимся, дважды продифференцируем почленно; мы получим

$$xu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1}$$

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$xu'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1}.$$

Подставляя это в уравнение, придем к тождеству

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + n^2 \cdot a_n) x^{n-1} = 0,$$

а тогда, по теореме 3°,

$$a_1 = 0, \quad n^2 \cdot a_n + a_{n-2} = 0 \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Отсюда, прежде всего, по индукции заключаем, что все коэффициенты с нечетными значками $a_{2m-1} = 0 \ (m = 1, 2, 3, \ldots)$; что же касается коэффициентов с четными значками a_{2m}, то по рекуррентной формуле

$$a_{2m} = -\frac{1}{4m^2} a_{2m-2}$$

они выразятся через a_0:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{(m!)^2 \cdot 2^{2m}} a_0.$$

Итак, с точностью до произвольного множителя a_0, получается окончательно ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(m!)^2 \cdot 2^{2m}}.$$

Что этот ряд, действительно, всюду сходится, легко проверить непосредственно. А из самого способа его получения явствует, что представляемая им функция*) удовлетворяет уравнению.

Обращаем внимание читателя на своеобразное использование *метода неопределенных коэффициентов*: здесь этих коэффициентов бесконечное множество, и пришлось прибегнуть к теореме о тождестве степенных рядов, вместо обычно применяемой теоремы о тождестве многочленов.

277. Степенной ряд как ряд Тейлора. Последняя теорема 6° открывает возможность п о с л е д о в а т е л ь н о г о м н о г о к р а т н о г о дифференцирования степенного ряда. Таким образом, попрежнему обозначая через $f(x)$ функцию, представляемую степенным

*) Это «бесселева функция с нулевым значком»; ее обозначают через $J_0(x)$.

рядом (1) в его промежутке сходимости, будем иметь повсюду внутри этого промежутка:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$
$$f'(x)=1\cdot a_1+2\cdot a_2x+3\cdot a_3x^2+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots$$
$$f''(x)=1\cdot 2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+\ldots+(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-2}+\ldots$$
$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3+\ldots+(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-3}+\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot na_n+\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если положить во всех этих равенствах $x=0$, то придем к хорошо нам знакомым выражениям коэффициентов степенного ряда:

$$a_0=f(0),\ a_1=f'(0),\ a_2=\frac{f''(0)}{2!},\ a_3=\frac{f'''(0)}{3!},\ \ldots$$
$$\ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

[ср. n° **252**, (7)]. Если бы речь шла о ряде общего вида (2) [n° **272**], то пришлось бы здесь лишь вместо значения $x=0$ подставить $x=x_0$. Итак:

7°. *Функция, представляемая степенным рядом в его промежутке сходимости, имеет внутри этого промежутка производные всех порядков. Самый ряд, по отношению к этой функции, является не чем иным, как ее рядом Тейлора.*

Это замечательное предложение проливает свет на вопросы разложения функций в степенные ряды, которыми мы занимались в предыдущей главе. Мы видим, что если функция вообще разлагается в степенной ряд, то необходимо — в ряд Тейлора; поэтому-то мы и ограничивались исследованием возможности для функции быть представленной именно своим рядом Тейлора.

278. Разложение непрерывной функции в ряд многочленов. Класс функций, допускающих разложение в степенной ряд, крайне ограничен. Теорема 7° предыдущего номера говорит о том, что функция, разлагающаяся в каком-либо промежутке в степенной ряд, во всяком случае должна иметь здесь производные всех порядков; да и это тяжелое условие, как мы знаем из § 6 главы XV [особо см. n° **259**!], далеко не обеспечивает возможности степенного разложения.

В этой связи приобретает важность доказанная Вейерштрассом (в 1885 г.) теорема, которая устанавливает для произвольной непрерывной функции возможность разложения в равномерно сходящийся ряд, составленный из целых многочленов. Мы сформулируем ее на языке последовательностей:

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ непрерывна в конечном замкнутом промежутке $[a, b]$, то существует последовательность целых*

многочленов $\{P_n(x)\}$, *которая в этом промежутке* ***равномерно*** *сходится к* $f(x)$.

Предположим сначала, что речь идет о промежутке $[0, 1]$. Тогда требованиям теоремы удовлетворяет конкретная последовательность многочленов

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} \text{ *)}. \tag{9}$$

Для доказательства этого нам понадобится ряд простых тождеств. Прежде всего, при любом натуральном n,

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = 1, \tag{10}$$

что сразу получается из разложения $(a+b)^n$ по биномиальной формуле Ньютона, если взять $a = x$, $b = 1 - x$. Далее,

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx. \tag{11}$$

Действительно, отбрасывая слагаемое, отвечающее $\nu = 0$, каждое из остальных можно переписать в виде

$$nx \cdot \frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(\overline{n-1} - \overline{\nu-1} + 1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-1)} x^{\nu-1}(1-x)^{\overline{n-1}-\overline{\nu-1}}$$

или, если ввести значок $\mu = \nu - 1$,

$$nx \cdot C_{n-1}^\mu x^\mu (1-x)^{\overline{n-1}-\mu}.$$

Вынося nx за скобки, в скобках получим сумму

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} C_{n-1}^\mu x^\mu (1-x)^{\overline{n-1}-\mu},$$

равную 1 в силу (10). Аналогично и

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu(\nu-1) C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = n(n-1)x^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{n-2} C_{n-2}^\lambda x^\lambda (1-x)^{\overline{n-2}-\lambda} =$$
$$= n(n-1)x^2. \tag{12}$$

Наконец, умножая (10) на n^2x^2, а (11) на $-(2nx-1)$, сложим эти тождества почленно с (12). В результате мы придем к тождеству

$$\sum_{\nu=0}^{n} [n^2x^2 - (2nx-1)\nu + \nu(\nu-1)] \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = n^2x^2 - (2nx-1)nx + n(n-1)x^2$$

---

*) Мы воспроизводим простейшее из многочисленных доказательств теоремы Вейерштрасса, которое принадлежит советскому академику С. Н. Бернштейну. Написанные многочлены $B_n(x)$, которые легко строятся по значениям функции $f(x)$ в рациональных точках $\frac{\nu}{n}$, получили название «многочленов Бернштейна» функции $f(x)$.

или, после упрощений,

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^2 C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = nx(1-x).$$

Если принять во внимание, что — при любом x —

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leqslant \frac{1}{4},$$

то получится неравенство

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^2 \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leqslant \frac{n}{4}, \tag{13}$$

которым мы непосредственно и воспользуемся.

Фиксируем по произволу x в промежутке $[0, 1]$. Ввиду (10), можно написать

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f(x) \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

Вычтем последнее равенство почленно из (9):

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left[f\left(\frac{\nu}{n}\right) - f(x)\right] \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu}. \tag{14}$$

Для оценки этой разности отдельно рассмотрим слагаемые, отвечающие близким к x точкам $\frac{\nu}{n}$, и прочие слагаемые. Точнее говоря, по заданному числу $\varepsilon > 0$ — ввиду непрерывности, а следовательно [n° 75] и равномерной непрерывности функции $f(x)$ — найдется такое число $\delta > 0$, зависящее только от ε, что

из $|x'' - x'| < \delta$ следует $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ $(0 \leqslant x',\ x'' \leqslant 1)$.

Вот мы и разобьем сумму в (14) на две, Σ_1 и Σ_2, относя в первую слагаемые, для которых $\left|\frac{\nu}{n} - x\right| < \delta$, а во вторую — те, для которых $\left|\frac{\nu}{n} - x\right| \geqslant \delta$. В первом случае, очевидно, $\left|f\left(\frac{\nu}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$ и [см. (10)]

$$\left|\sum\nolimits_1\right| < \varepsilon \cdot \sum_{\left|\frac{\nu}{n} - x\right| < \delta} C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} = \varepsilon.$$

Во втором же, вводя наибольшее значение M для $|f(x)|$, имеем такую оценку

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < 2M \cdot \sum_{\left|\frac{\nu}{n} - x\right| \geqslant \delta} C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

Но здесь $(\nu - nx)^2 \geqslant \delta^2 n^2$, так что тем более

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < \frac{2M}{\delta^2 n^2} \cdot \sum_{\left|\frac{\nu}{n} - x\right| \geqslant \delta} (\nu - nx)^2 \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{\delta^2 n^2} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu - nx)^2 \cdot C_n^\nu x^\nu (1-x)^{n-\nu}.$$

Окончательно, используя неравенство (13), получаем

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < \frac{M}{2\delta^2 n}.$$

Если взять $n > \frac{M}{2\delta^2 \varepsilon}$, то (независимо от x!) будет и

$$\left|\sum\nolimits_2\right| < \varepsilon,$$

а тогда, по совокупности,

$$|B_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

что и доказывает требуемое утверждение — пока для промежутка [0, 1].

Случай же произвольного промежутка $[a, b]$ приводится к рассмотренному простым преобразованием переменной: $x = a + y(b-a)$ где, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Построенная по непрерывной функции от y: $f(a + y(b-a))$ последовательность многочленов $B_n(y)$ сходится к ней равномерно для y в [0, 1]. Тогда последовательность многочленов $P_n(x) = B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ будет сходиться к функции $f(x)$ равномерно для x в $[a, b]$. Теорема доказана.

Переходя обычным образом от функциональной последовательности к функциональному ряду [см. n° **263** и **264**], можно представить теорему Вейерштрасса и в такой форме:

Каждая непрерывная в промежутке $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *разлагается в этом промежутке в равномерно сходящийся ряд*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x),$$

составленный из целых многочленов *).

Подобное разложение в отношении практических применений, разумеется, уступает разложению в ряд Тейлора, но, благодаря чрезвычайной общности, имеет большое теоретическое значение. В частности, отсюда вытекает, что *каждая непрерывная функция может быть задана единым «аналитическим выражением»* [n° **18**; ср. точку зрения Эйлера, n° **21**].

§ 4. ОЧЕРК ИСТОРИИ РЯДОВ

279. Эпоха Ньютона и Лейбница. Параллельно с созданием в XVII веке дифференциального и интегрального исчисления [глава XIV] в математическую практику вошли и бесконечные ряды. Начнем с появившихся в 1668 г. в Англии работ, так или иначе связанных с логарифмическим рядом.

---

*) Например, можно положить $p_1(x) = P_1(x)$, $p_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x)$ (для $n > 1$).

В этом году было опубликовано небольшое сочинение Николая Меркатора (1620—1687) «Логаритмотехника», посвященная методам вычисления логарифмов. В одной из последних глав автор занимается квадратурой гиперболы $xy=1$, отнесенной к асимптотам. Полагая $x=1+a$, он пишет уравнение гиперболы в виде

$$y=\frac{1}{1+a}.$$

Путем деления Меркатор переходит к разложению в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+\ldots,$$

а затем, интегрируя по a почленно, получает для площади гиперболы известный ряд [n° 256, (21)]

$$a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\ldots$$

Вопрос об области применимости ряда не затрагивается (на приложенном чертеже случайно оказывается $a>1$, так что разложение на деле неприменимо!). На этом вопросе останавливается в своей рецензии Валлис. Наконец, Вильям Броункер (1620—1684) дал чисто геометрический вывод частной формулы

$$\ln 2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots$$

Для практического вычисления он употребляет более быстро сходящийся ряд, причем — путем сравнения с геометрической прогрессией — находит границы для остатка.

Несколько ранее начал заниматься бесконечными рядами Ньютон, но его исследования в этой области, переплетающиеся с исследованиями в других областях анализа, были опубликованы, как мы знаем, с большим опозданием. Сюда относятся, прежде всего, его письма от 1676 г., предназначенные для Лейбница, и его две фундаментальные работы: «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» и «Метод флюксий и бесконечных рядов», о которых была речь в главе XIV.

Повидимому не позже 1666 г. Ньютон уже владел биномиальным рядом для дробных или отрицательных значений показателя. Сначала он пришел к нему с помощью умозаключений по аналогии; разложения корней проверялись путем возведения в степень. Впоследствии Ньютон находит прямой метод деления степенных рядов и извлечения корней из рядов, перенося сюда принципы уже известного к тому времени учения о десятичных дробях. Разлагая различные выражения в степенные ряды, Ньютон сводит нахождение их флюксий и флюэнт к таким же операциям над степенями, и этим значительно расширяет область применимости созданного им анализа.

Нередко Ньютон прибегает к обращению ряда, т. е., исходя из разложения одной величины по степеням другой, устанавливает разложение второй по степеням первой. Так, отправляясь от логарифмического ряда

$$z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots,$$

он получает

$$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\ldots,$$

т. е. по существу — показательный ряд (добавив в обеих частях по единице, мы получили бы слева число $1+x$, натуральный логарифм которого как раз и равен z). Любопытно, что разложение синуса x по степеням дуги z*)

$$x=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\ldots,$$

Ньютон находит обращением ряда, выражающего дугу

$$z=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\ldots,$$

т. е. из разложения арксинуса, которое Ньютону естественно представляется более простым, ибо получается интегрированием флюксии арксинуса $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, легко разворачиваемой в биномиальный ряд [n° **275**, 2)].

Бесконечные ряды широко используются Ньютоном для решения уравнений, как алгебраических, так и дифференциальных. Применяемый им метод, по существу, есть метод неопределенных коэффициентов.

Излагая в «Анализе» вопрос о решении уравнения с помощью ряда, Ньютон останавливается на доказательстве сходимости ряда именно к корню уравнения. Но в других случаях, разлагая в ряд наперед известные величины, он сходимостью не занимается. Впрочем, так как главное назначение рядов Ньютон видит в приближенных вычислениях, то его, естественно, не интересует формальное установление факта сходимости ряда — ему нужна быстрая сходимость! Например, вычисление $\ln 2$ Ньютон осуществляет не с помощью медленно сходящегося ряда

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

а исходя из формулы $\ln 2=2\ln 1{,}2-\ln 0{,}8-\ln 0{,}9$: аргументы 1,2, 0,8, 0,9 мало разнятся от единицы, что и обеспечивает быструю сходимость логарифмического ряда. Оценки допускаемой погрешности у Ньютона нет.

Лейбниц, независимо от Ньютона, пришел к некоторым из тех разложений, которыми Ньютон владел раньше. В 1693 г. Лейбниц предложил для интегрирования дифференциальных уравнений в точности метод неопределенных коэффициентов («предполагая самый искомый ряд как бы найденным»). В частности, этим путем он вновь получил разложения логарифма и синуса, исходя из дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют.

В 1682 г. впервые Лейбницем был опубликован ряд

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

выражающий число $\frac{\pi}{4}$; владел этим рядом Лейбниц уже давно **). Попутно Лейбниц дает оценку погрешности при замене числа $\frac{\pi}{4}$ отрезком ряда. Эти указания впоследствии были им обобщены на случай любого знакопеременного ряда с членами, по абсолютной величине убывающими до нуля (например, в письме к Иог. Бернулли, 1714 г.). При этом, впрочем, существование суммы само собою разумеется, и устанавливается фактически лишь

*) Радиус круга принят равным единице.

**) Но, повидимому, все же был опережен англичанином Джемсом Грегори (1638—1675), который в 1671 г. в письме сообщил ряд для арктангенса.

неограниченное приближение к ней частичных сумм попеременно с разных сторон [ср. n° **244**. замечание].

В более поздних письмах Лейбниц говорит о рядах, «сходящихся» к своим суммам, понимая сходимость, как и мы. Но в то же время он соглашается с утверждением, что ряд $1-1+1-1+\ldots$ имеет суммой число $\frac{1}{2}$; это получается из разложения

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

при $x=1$: если оно верно при $x<1$, то по «закону непрерывности» должно быть верно и при $x=1$! Отсутствие ясности, повидимому, ощущает и сам Лейбниц; недаром он говорит в одном письме: «... верить рассуждениям о бесконечных рядах следует только тогда, когда истину можно доказать и с помощью конечных (величин) по методу Архимеда».

Бесконечными рядами занимались оба сподвижника Лейбница — братья Бернулли, особенно — старший из них, Якоб: совокупность его работ по рядам (1689—1704) дает изложение всего, что известно было в этой области в его время. В частности, сначала Иоган, а затем Якоб дали доказательство того, что «сумма бесконечного гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

— бесконечна». Доказательство Як. Бернулли основано на том же принципе, что и обычное [n° **236**, 1)]. Он справедливо подчеркивает в заключение, что «сумма бесконечного ряда, коего последний член исчезает, иногда конечна, а иногда бесконечна». Разумеется, «последний член» должен быть истолкован как предел общего члена. Нужно отметить, что Як. Бернулли свободно пользуется расходящимися рядами и даже получает с их помощью сходящиеся разложения.

280. Период формального развития теории рядов. В XVIII веке принципиальные вопросы не привлекали к себе большого внимания, но зато практика рядов — главным образом в руках Эйлера — достигла высокого развития.

В начале века, в 1715 г., вышла в свет небольшая книга Тейлора «Метод разностей, прямой и обратный». Неясность изложения имела следствием то, что она не сразу получила распространение. Тейлор исходил из рассмотрения конечных разностей и лишь затем, переходя, как к предельному случаю, к бесконечно малым разностям и их отношениям, установил разложение наращенного значения функции x от z по степеням приращения v величины z:

$$x+\frac{v}{1}\,\frac{dx}{dz}+\frac{v^2}{1\cdot 2}\,\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{d^3x}{dz^3}+\ldots;$$

это разложение впоследствии и стали называть рядом Тейлора. Сам автор, видимо, не полностью оценил свое открытие: приложений в книге оно находит мало.

Значение этой формулы было выявлено лишь в обширном «Трактате о флюксиях» Маклорена, вышедшем в 1742 г. Маклорен пришел к тому же ряду другим путем: он кладет в основу разложение по степеням x с неопределенными коэффициентами, повторно дифференцирует его и, полагая всякий раз $z=0$, последовательно определяет коэффициенты [ср. n° **277**, 7°]. В виде примера он получает биномиальный ряд. При выводе разложений других простейших функций Маклорен использует и дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют.

В «Трактате» мы находим еще две вещи, заслуживающие упоминания. Во-первых, Маклорен отчетливо устанавливает, правда — лишь в геометрической форме, интегральный признак сходимости и расходимости положительных рядов (впоследствии аналитически наново доказанный Коши; см. n° 241). Затем он выводит (независимо от Эйлера, который сделал это несколькими годами раньше) знаменитую формулу *), связывающую суммирование членов данного вида с вычислением некоего интеграла.

С 1730 г. начинается блестящая серия работ Эйлера по бесконечным рядам. Им посвящены многочисленные статьи, которые на протяжении более полувека публиковались в трудах Петербургской Академии наук; много места отведено им и в знаменитых трактатах Эйлера по анализу. Перечислим вкратце достижения Эйлера, не придерживаясь при этом хронологического порядка.

Эйлер впервые выводит, с помощью подразумевающихся предельных переходов, показательный и логарифмический ряды, исходя из биномиального [ср. n° 268]. Точно так же он получает ряды для косинуса и синуса из известных формул для $\cos nz$ и $\sin nz$. Он уподобляет бесконечный степенной ряд обыкновенному многочлену и разлагает его на множители, и таким путем приходит к представлению синуса и других функций в виде бесконечного произведения. Распространяя известное правило перемножения двучленов с одинаковыми первыми членами на случай бесконечного их числа, он получает замечательные формулы

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}, \qquad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}$$

и другие, подобные им. Эйлеру принадлежат и разложения $\frac{1}{\sin z}$ и $\operatorname{ctg} z$ на простые дроби [см. ниже, n° 406, 3), замечание].

Эйлер рассматривает ряды и с комплексными членами; сопоставление рядов для $\sin x$, $\cos x$ и e^x приводит его к знаменитым формулам, связывающим эти функции [n° 254] — их в свое время Лагранж назвал «одним из самых прекрасных аналитических открытий, сделанных в этом веке».

Много занимался Эйлер суммированием рядов. Как упоминалось, он раньше Маклорена пришел к известной формуле суммирования и не раз к ней возвращался. В частности, он применил ее к частичной сумме гармонического ряда [ср. n° 236, 1) и n° 238, 4)]. Эйлер многообразно сопоставляет ряды и интегралы; на этом пути он находит и изучает важные интегралы, впоследствии получившие его имя [им посвящен § 4 главы XVIII].

С Маклореном Эйлер соприкасается еще в одном пункте: те же соображения, которые привели Маклорена к его интегральному признаку, Эйлер уже раньше применял к установлению границ, между которыми содержится сумма ряда.

Из других вопросов, которыми интересовался Эйлер, упомянем о преобразовании рядов — в целях улучшения их сходимости, о преобразовании бесконечных произведений в ряды [см., например, n° 251, 3)]. Наконец, что особенно важно отметить, мы находим у Эйлера разнообразные приложения рядов не только в самом анализе, но также в алгебре, в теории чисел и в других областях.

Однако все эти воистину замечательные достижения не получили у Эйлера сколько-нибудь убедительного обоснования. Подобно большинству своих современников, Эйлер к вопросам сходимости относится беззаботно и свободно пользуется расходящимися рядами. Например, складывая разложения

$$\frac{n}{1-n}=n+n^2+n^3+\ldots \text{ и } \frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

*) Ее называют формулой Эйлера — Маклорена. К сожалению, ей не нашлось места в нашем курсе.

он заключает, что бесконечный в обе стороны ряд

$$\ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + n^3 + \ldots^{*)}$$

равен 0! Аналогично, исходя из равенства

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

Эйлер не только выводит отсюда при $x = -1$ ряд, занимавший еще Лейбница:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$

но и пытается осмыслить равенство

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = -1,$$

получающееся при $x = 2$. Впрочем, Эйлер дает себе отчет в том, что для подобных, расходящихся рядов, нельзя говорить о суммах в таком же смысле, как о сумме сходящегося ряда, к которой можно произвольно приблизиться, последовательно складывая его члены. Эйлер считает, что «сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд»**). В таком, так сказать, «обобщенном» понимании суммы есть уже зерно истины (и оно соприкасается с современной точно обоснованной теорией расходящихся рядов).

Против пользования расходящимися рядами резко восставал Даламбер: рассуждения, проводимые с их помощью, кажутся ему «подозрительными», даже если результаты их согласуются с истиной. Впрочем, самое понятие сходимости и расходимости у Даламбера имело «локальный» характер, будучи связано с тем, оказывается ли последующий член (абсолютно) меньшим или большим предыдущего. Таким образом, по его терминологии, ряд мог до определенного места сходиться и лишь потом начать расходиться, и наоборот [ср. замечание n° 239].

Остановимся в заключение на Лагранже — одном из крупнейших математиков рассматриваемого периода. Прежде всего, надлежит упомянуть о носящем его имя ряде, дающем разложение корня $x = p$ уравнения $a - x + \varphi(x) = 0$, и даже — любой функции $\psi(p)$ от этого корня.

В сочинении «Теория аналитических функций» (1797 г.) Лагранж делает попытку освободить дифференциальное исчисление «от рассмотрения бесконечно малых или исчезающих величин, пределов или флюксий» и свести его к «алгебраическому анализу конечных величин» ***). В этой попытке отправной точкой призваны были служить именно степенные ряды. Допустив, что для функции $f(x)$ имеет место разложение

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots,$$

где p, q, r, ... — функции от x, Лагранж прямо определяет последовательные «производные функции» (здесь впервые появляется этот термин!) через коэффициенты разложения, исходя из привычных соотношений

$$p = f'(x), \quad q = \frac{f''(x)}{2}, \quad r = \frac{f'''(x)}{2 \cdot 3}, \quad \ldots$$

---

*) Читатель, конечно, заметит, что вовсе нет значений n, при которых обе прогрессии сходились бы одновременно.

**) См. А. Эйлер, «Дифференциальное исчисление», § 111.

***) Впрочем, те же идеи Лагранж высказывал и раньше.

На этой основе Лагранжу удалось изложить не только анализ, но и его приложения к геометрии и механике. Тем не менее, эта точка зрения, явившаяся — как раз в преддверии нового периода в истории анализа — реакцией на неудачу всех прежних попыток его строгого обоснования, распространения не получила.

В том же сочинении Лагранж устанавливает и известную [n° **106**] удобную форму для дополнительного члена в формуле Тейлора. Впрочем, для Лагранжа этот член был просто выражением остатка ряда, сходимость которого подразумевалась, его назначением было лишь облегчить оценку погрешности, проистекающей от пренебрежения последними членами ряда.

Самую сходимость ряда Лагранж (подобно Эйлеру и другим современникам) понимал как стремление к нулю общего члена. Определения понятия суммы сходящегося ряда у него нет, хотя в достаточно близкой нам форме оно уже не раз встречалось, например, у Маклорена (1742 г.) и у Варинга (1776 г.). В начале XIX века французский математик Фурье в своем знаменитом сочинении «Аналитическая теория теплоты» (1811 г.; опубликовано в 1822 г.) дает правильное определение сходимости ряда и его суммы, замечая при этом, что для сходимости ряда вовсе не достаточно, чтобы члены ряда «непрерывно уменьшались» до нуля. Как мы помним, это обстоятельство больше чем за сто лет до того — на примере гармонического ряда — подчеркнул еще Якоб Бернулли!

Таким образом, рассматриваемая эпоха, необычайно богатая формальными достижениями в области теории рядов, для логического ее обоснования дала мало.

281. Создание точной теории. Лишь в последующую эпоху — уже в XIX веке, ряды стали предметом изучения сами по себе, и критический пересмотр основ анализа на первых же порах коснулся именно их.

В 1813 г. вышла в свет работа Гаусса*) «Общие исследования относительно ряда

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots\text{».}$$

(Этот ряд получил название «гипергеометрического».) Хотя в понимании сходимости и расходимости Гаусс, видимо, был близок к Даламберу, но все же именно здесь мы впервые находим точно сформулированный признак, который по отношению к приведенному ряду дает полное решение вопроса о сходимости.

Современное определение понятия суммы ряда и его сходимости или расходимости, основанное на понятии предела, окончательно установилось после работ Больцано (1817 г.) и Коши (1821 г.). В предисловии к «Алгебраическому анализу» Коши прямо говорит, что «расходящийся ряд не имеет суммы». Кроме того, оба названных ученых установили в общей форме условие, необходимое и достаточное для сходимости ряда [n° **242**]. Коши дал также несколько простых и удобных признаков, достаточных для удостоверения сходимости или расходимости положительного ряда [n° **239**, **241**]. Впоследствии появилось огромное количество подобных достаточных признаков, все более и более тонких и сложных **); интерес к исследованиям этого рода несколько ослабел к началу нашего века.

Далее, Коши принадлежит утверждение о том, что сходимость ряда $\sum a_n$ следует из сходимости ряда $\sum|a_n|$ [n° **243**], и различение случаев «абсолютной» и «неабсолютной» сходимости (хотя и без применения этих терминов).

---

*) Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — крупнейший немецкий математик.

**) Из русских математиков ими занимались Н. И. Лобачевский и В. П. Ермаков (1845—1922).

Самый факт существования неабсолютно сходящихся рядов, по примеру ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

был известен еще со времен Лейбница и братьев Бернулли, но Коши первым обратил внимание на то, что неабсолютная сходимость отражается на других свойствах ряда. Прежде всего, как показал Коши еще в 1821 г., к неабсолютно сходящимся рядам может оказаться неприменимой его теорема об умножении рядов [n° **248**, 3)]. Затем, как раз по поводу вышеприведенного ряда, Коши (в 1833 г.) отметил, что сходимость его может быть нарушена при перестановке членов ряда.

В 1837 г. Дирихле высказал общее утверждение о том, что в абсолютно сходящемся ряде при перестановке членов сохраняется сходимость и величина суммы [n° **246**]. В то же время он на примерах пояснил, что в случае неабсолютной сходимости от такой перестановки не только может нарушиться сходимость — это было известно и раньше, — но даже при сохранении сходимости может измениться самая величина суммы. Общий и окончательный — в этом направлении — результат [n° **247**] установил Риман; он был опубликован лишь в 1867 г. — уже посмертно.

В «Алгебраическом анализе» Коши (1821 г.) мы находим исследования, относящиеся к степенным рядам для случая как вещественной, так и комплексной переменной. Им был не только установлен вид области сходимости подобного ряда (промежуток или круг сходимости), но и дано точное выражение радиуса сходимости через коэффициенты ряда. Внутри области сходимости Коши обращается со степенным рядом, как с обыкновенным многочленом, например дифференцирует его почленно, не находя нужным дать обоснование этого.

По отношению к общим функциональным рядам Коши пытается доказать непрерывность суммы сходящегося ряда непрерывных функций (1821 г.) и право интегрировать подобный ряд почленно (1823 г.), притом без каких-либо ограничений относительно характера сходимости ряда [ср. n° **266** и **269**]: понятием равномерной сходимости Коши не владел и, пользуясь языком бесконечно малых, иной раз не давал себе отчета в том, от каких переменных они фактически зависят.

На ошибочность первого утверждения Коши указал Абель — в знаменитом своем мемуаре, посвященном биномиальному ряду (1826 г.). В качестве опровергающего примера Абель приводит ряд, составленный из синусов:

$$\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots;$$

хотя он сходится при всех значениях x, но его сумма в точках $x=(2m+1)\pi$ (m — целое) терпит разрыв. В то же время по отношению к степенному ряду Абель строго доказывает непрерывность его суммы при каждом значении переменной, при котором ряд сходится, даже если это значение совпадает с концом промежутка сходимости [n° **273**, **274**]. В процессе доказательства Абель фактически устанавливает наличие именно того свойства, которое впоследствии получило название равномерной сходимости.

По поводу почленного интегрирования высказал (в 1845 г.) свои сомнения Чебышёв, который подчеркнул, что оно допустимо «только в частных случаях». Так постепенно создавалось убеждение, что на бесконечные функциональные ряды нельзя безоговорочно распространять привычные для конечных сумм правила, хотя оставалось неясным, в каких же случаях это все же можно делать. Решающую роль здесь сыграло изучение самого характера сходимости функциональных рядов и введение понятия **равномерной сходимости**.

Это понятие — и самый термин, — повидимому, впервые появились в 1841 г. в одной (опубликованной лишь значительно позже) работе Вейерштрасса и применялись им с тех пор на лекциях. В печати различение равномерной и неравномерной сходимости было проведено Зайделем *) в 1848 г. и Стоксом **) в 1849 г. Если сумма ряда непрерывных функций имеет точку разрыва, то вблизи нее «ряд сходится произвольно медленно» (Зайдель) или «сходимость ряда становится бесконечно замедленной» (Стокс).

При этом Стокс думал, что и, обратно, из непрерывности суммы такого ряда можно заключить об отсутствии замедленности, т. е. — как сказали бы мы — о наличии равномерной сходимости; Зайдель же считал этот вопрос открытым. Впоследствии на примерах было показано, что обратное заключение вообще неверно; справедливость его специально для случая положительного ряда в 1876 г. доказал Дини [n° **267**].

Этим мы заканчиваем наш очерк. Дополнением к нему может служить «Очерк истории тригонометрических рядов» в конце главы XXIV [см. также в n° **313** «Исторические замечания о перестановке двух предельных операций»].

---

*) Филипп Людвиг Зайдель (1821—1896) — немецкий математик.

**) Джон Габриель Стокс (1819—1903)—английский физик и математик.

ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ

282. Определение интегралов с бесконечными пределами. В главе XI было изучено понятие определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ для случая конечного промежутка $[a, b]$ и ограниченной функции $f(x)$. Настоящая глава посвящена обобщению этого понятия в различных направлениях. Начнем с рассмотрения интеграла, распространенного на бесконечный промежуток.

Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, \infty)$, т. е. для $x \geqslant a$, и интегрируема в любой конечной его части $[a, A]$, так что интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$ имеет смысл при любом $A > a$.

Конечный или бесконечный предел этого интеграла при $A \to \infty$ называют (несобственным) интегралом функции $f(x)$ в промежутке от a до ∞ и обозначают символом

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)\,dx. \qquad (1)$$

В случае существования такого конечного предела говорят, что интеграл (1) сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в бесконечном промежутке $[a, \infty]$. В отличие от изученного ранее интеграла в собственном смысле или собственного интеграла, только что определенный интеграл (1) называется несобственным*).

Если предел (1) бесконечен или вовсе не существует, то про интеграл говорят, что он расходится.

---

*) Напомним, что мы уже сталкивались с понятием несобственного интеграла в n° 241.

Аналогично (1), определяется и *интеграл функции* $f(x)$ *от* $-\infty$ *до* a:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)\,dx \; (A' < a), \tag{2}$$

равно как и *интеграл функции* $f(x)$ *от* $-\infty$ *до* $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to +\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx. \tag{3}$$

При этом сохраняется и терминология, введенная по поводу интеграла (1).

В последнем случае, взяв любое a, можно положить

$$\int_{A'}^{A} f(x)\,dx = \int_{A'}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{A} f(x)\,dx,$$

и существование предела при $A' \to -\infty$, $A \to +\infty$ для интеграла слева, очевидно, равносильно существованию порознь пределов (1) и (2) для интегралов справа. Таким образом, интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ можно определить и равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

в предположении существования порознь интегралов справа *). Определение это не зависит на деле от выбора точки a.

Примеры. 1) Функция $\frac{1}{1+x^2}$ интегрируема в любом конечном промежутке $[0, A]$ $(A > 0)$, причем имеем

$$\int_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} A.$$

Так как для этого интеграла при $A \to \infty$ существует конечный предел $\frac{\pi}{2}$, то интеграл от 0 до ∞ сходится и имеет значение

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to \infty} \int_{0}^{A} = \frac{\pi}{2}.$$

2) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \to -\infty} (-\operatorname{arctg} A') = \frac{\pi}{2}.$$

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0} = \pi.$$

---

*) Исключается лишь случай, когда эти интегралы равны бесконечности разных знаков.

283. Применение основной формулы интегрального исчисления. В приведенных выше примерах интеграл по конечному промежутку вычислялся с помощью первообразной функции, а затем осуществлялся переход к пределу. Можно объединить оба момента в одной формуле.

Пусть, например, функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a, \infty)$, так что для $f(x)$ в этом промежутке существует первообразная функция $F(x)$ [n° 183], и по основной формуле интегрального исчисления [n° 185]

$$\int_a^A f(x)\,dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^A.$$

Отсюда ясно, что несобственный интеграл (1) существует в том и только в том случае, если существует конечный предел

$$\lim_{A \to \infty} F(A) = F(\infty),$$

и тогда

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty.$$

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^a,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

если под $F(-\infty)$ разуметь предел $\lim\limits_{A' \to -\infty} F(A')$. Самая возможность вычисления двойной подстановки, связанная с существованием и конечностью фигурирующего в ней предела, свидетельствует уже о существовании интеграла.

Обратимся к дальнейшим примерам.

4) Изучим прежде всего вопрос, при каких значениях показателя λ существует несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} \qquad (a > 0).$$

Пусть $\lambda \neq -1$, тогда

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda}\Big|_a^\infty.$$

При $\lambda > 1$ двойная подстановка — а с нею и интеграл — имеет конечное значение, при $\lambda < 1$ оба выражения обращаются в ∞. При $\lambda = 1$ имеем

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^\infty = \infty.$$

Таким образом, предложенный интеграл при $\lambda > 1$ сходится, а при $\lambda \leqslant 1$ расходится.

5) Рассмотрим интегралы $(a > 0)$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx.$$

Вспоминая соответствующие им первообразные [n° 164, 4)], получаем сразу

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^\infty = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

6) Наконец, интегралы

$$\int_0^\infty \sin x\, dx, \qquad \int_0^\infty \cos x\, dx$$

не существуют, поскольку двойные подстановки

$$-\cos x \Big|_0^\infty, \qquad \sin x \Big|_0^\infty$$

лишены смысла: $\cos x$ и $\sin x$ при $x \to \infty$ пределов не имеют.

284. Аналогия с рядами. Простейшие теоремы. В последующем мы ограничимся интегралами вида (1): все сказанное о них легко переносится на случаи (2) и (3). При этом мы всегда будем предполагать, что функция $f(x)$ интегрируема в собственном смысле между любыми пределами a и $A > a$, так что вопрос относится только к несобственному интегралу от a до ∞.

Между несобственными интегралами $\int_a^\infty f(x)\, dx$ и числовыми рядами $\sum_1^\infty a_n$ существует глубокая аналогия, которую полезно подчеркнуть.

Если процесс суммирования по n заменить процессом интегрирования по x, то аналогами будут

общий член ряда a_n	*подинтегральная функция* $f(x)$
частичная сумма ряда $\sum_1^N a_n$	*собственный интеграл* $\int_a^A f(x)\,dx$
сумма ряда $\sum_1^\infty a_n$	*несобственный интеграл* $\int_a^\infty f(x)\,dx$
как предел частичной суммы при $N \to \infty$	*как предел предыдущего интеграла при* $A \to \infty$
остаток ряда $\sum_{N+1}^\infty a_n$	*интеграл* $\int_A^\infty f(x)\,dx$

Мы перечислим простейшие теоремы о несобственных интегралах, сходные с теоремами n° 235 о рядах. Доказательство их — с использованием указанной аналогии — предоставляем читателю.

1°. *Если сходится интеграл* $\int_a^\infty f(x)\,dx$, *то сходится также интеграл* $\int_A^\infty f(x)\,dx$ $(A > a)$, *и наоборот. При этом*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^\infty f(x)\,dx.$$

2°. *В случае сходимости интеграла* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *имеем*

$$\lim_{A\to\infty} \int_A^\infty f(x)\,dx = 0.$$

3°. *Из сходимости интеграла* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *вытекает и сходимость интеграла* $\int_a^\infty c\cdot f(x)\,dx$ ($c=\text{const}$), *причем*

$$\int_a^\infty c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Наконец:

4°. *Если сходятся оба интеграла* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *и* $\int_a^\infty g(x)\,dx$, *то сходится интеграл* $\int_a^\infty [f(x)\pm g(x)]\,dx$, *и*

$$\int_a^\infty [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx \pm \int_a^\infty g(x)\,dx.$$

285. Сходимость интеграла в случае положительной функции. Если функция $f(x)$ положительна (неотрицательна), то интеграл

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx \qquad (4)$$

представляет собой монотонно возрастающую функцию от переменной A. Вопрос о существовании для нее конечного предела при $A\to\infty$ решается очень просто — на основании теоремы о пределе монотонной функции [n° **47**]:

Для сходимости несобственного интеграла (1) — *в случае положительной функции* $f(x)$ — *необходимо и достаточно, чтобы интеграл* (4) *при возрастании* A *оставался ограниченным сверху:*

$$\int_a^A f(x)\,dx \leqslant L \qquad (L=\text{const}).$$

Если же это условие не выполнено, то интеграл (1) *имеет значение* ∞. [Ср. n° **236**.]

На этом основана следующая «теорема сравнения» для интегралов от положительных функций:

Теорема 1. *Если, хотя бы при* $x \geqslant A$ $(A \geqslant a)$, *имеет место неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то из сходимости интеграла* $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *или, что то же, из расходимости* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *следует расходимость* $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$.

Доказательство можно скопировать с доказательства теоремы 1 n° **237**.

Часто полезна следующая теорема, являющаяся следствием первой:

Теорема 2. *Если существует предел*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \qquad (0 \leqslant K \leqslant +\infty),$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$, *при* $K < +\infty$, *вытекает сходимость интеграла* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, *а из расходимости первого интеграла, при* $K > 0$, *вытекает расходимость второго.* [Таким образом, при $0 < K < +\infty$, оба интеграла сходятся или оба расходятся одновременно.]

Доказательство — такое же, как и для аналогичной теоремы 2 n° **237**.

Выбирая конкретную функцию для сравнения, можно отсюда получить частные признаки сходимости или расходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. Практическое значение имеет сравнение с функцией $\frac{1}{x^\lambda}$, которая интегрируема от $a > 0$ до ∞ при $\lambda > 1$ и не интегрируема при $\lambda \leqslant 1$ [n° **283**, 4)]. На этом построены следующие признаки.

Пусть для достаточно больших x функция $f(x)$ *имеет вид*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

Тогда: 1) *если* $\lambda > 1$ *и* $\varphi(x) \leqslant c < +\infty$, *то интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *сходится,* 2) *если же* $\lambda \leqslant 1$ *и* $\varphi(x) \geqslant c > 0$, *то этот интеграл расходится.*

Для доказательства надо воспользоваться теоремой 1; функцией сравнения является $\frac{c}{x^\lambda}$ [n° 284, 3°].

Если при $x \to \infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $\lambda > 0$ $\left(\text{по сравнению с } \frac{1}{x}\right)$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится или расходится в зависимости от того, будет ли $\lambda > 1$ или $\leqslant 1$.

Здесь следует сослаться на теорему 2; роль функции $g(x)$ играет $\frac{1}{x^\lambda}$.

Примеры:

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Подинтегральные выражения при $x \to \infty$ представляют собою бесконечно малые, соответственно, порядка $1/2$ и 2. Следовательно, первый интеграл расходится, а второй — сходится.

286. Сходимость интеграла в общем случае. Вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$, согласно общему определению (1), приводится к вопросу о существовании конечного предела при $A \to \infty$ для функции (4) от A. Применяя к этой функции теорему Больцано — Коши [n° 53], можно условие сходимости несобственного интеграла представить в следующей форме:

Для сходимости несобственного интеграла $\int_0^\infty f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы каждому числу $\varepsilon > 0$ отвечало такое число $A_0 > a$, чтобы при $A > A_0$ и $A' > A$ выполнялось неравенство

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left|\int_a^{A'} f(x)\,dx - \int_a^{A} f(x)\,dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Этот критерий позволяет с легкостью установить такое предложение:

Если сходится интеграл $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$, то и подавно сходится интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

В самом деле, применяя изложенный критерий к интегралу $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$, который предполагаем сходящимся, видим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_0 > a$, что

$$\int\limits_A^{A'} |f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

лишь только $A' > A > A_0$. Но, очевидно,

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_A^{A'} |f(x)|\,dx$$

и, следовательно, для тех же A, A' тем более выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

откуда, в силу нашего критерия, вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Отметим, что из сходимости последнего интеграла, вообще говоря, не следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$. Это обстоятельство дает основание особо отличать следующий случай. Если наряду с интегралом $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$, то интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ называют абсолютно сходящимся, а функцию $f(x)$ — абсолютно интегрируемой в промежутке $[a, \infty]$ *). Пример интеграла, сходящегося неабсолютно, будет дан в n° **287**.

Доказанная теорема позволяет устанавливать сходимость интеграла от знакопеременной функции $f(x)$, применяя признаки предыдущего номера к положительной функции $|f(x)|$: если

---

*) Снова — аналогия с бесконечными рядами [ср. n° **243**].

эта функция оказывается интегрируемой, то функция $f(x)$ также будет интегрируема и притом абсолютно.

Пусть, например, предложен интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx$. Так как

$$\left|\frac{\cos ax}{k^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2+x^2},$$

и интеграл от функции справа сходится, то [n° 285, теорема 1] сходится интеграл от функции слева, а с ним — (абсолютно) сходится и предложенный интеграл.

Как видно, для знакопеременной функции изложенные здесь соображения — в благоприятном случае — могут установить лишь абсолютную сходимость. Если же интеграл от данной функции расходится или сходится, но не абсолютно, то различить эти случаи с помощью признаков, установленных для положительных функций, нельзя.

287. Более тонкие признаки. Мы дадим сейчас признаки другого типа, которые позволяют устанавливать сходимость несобственных интегралов в ряде случаев, когда абсолютная сходимость отсутствует.

Пусть имеем две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные и непрерывные в промежутке $[a, \infty)$; относительно функции $g(x)$ будем еще предполагать, что она монотонна и имеет непрерывную же производную (очевидно, не меняющую знака!). Нас интересуют условия, обеспечивающие сходимость интеграла от произведения

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx. \tag{5}$$

Предположим, что

(I) 1) *интеграл* (4)

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx$$

представляет собою ограниченную функцию от A:

$$|\Phi(A)| \leqslant K \qquad (K = \text{const}, \quad a \leqslant A < \infty)$$

(хотя бы предела $\lim\limits_{A\to\infty} \Phi(A)$, т. е. несобственного интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, и не существовало);

2) $g(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$.

Тогда интеграл (5) *сходится.*

При любых $A' > A > a$ имеем, интегрируя по частям:

$$\int\limits_A^{A'} f(x)\,g(x)\,dx = \Phi(A')\,g(A') - \Phi(A)\,g(A) - \int\limits_A^{A'} \Phi(x)\,g'(x)\,dx;$$

если к последнему интегралу применить обобщенную теорему о среднем [n° 182, 10°], то он представится в виде

$$\int_A^{A'} \Phi(x)\, g'(x)\, dx = \Phi(\xi) \int_A^{A'} g'(x)\, dx = \Phi(\xi)\, [g(A') - g(A)] \quad (A \leqslant \xi \leqslant A')$$

и окончательно

$$\int_A^{A'} f(x)\, g(x)\, dx = [\Phi(A') - \Phi(\xi)]\, g(A') + [\Phi(\xi) - \Phi(A)]\, g(A). \qquad (6)$$

Так как, в силу 1), обе скобки по абсолютной величине не превосходят $2K$, а, ввиду 2), найдется такое A_0, что при $x > A_0$

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}$$

(где $\varepsilon > 0$ взято наперед по произволу), то при $A' > A > A_0$

$$\left| \int_A^{A'} f(x)\, g(x) \right| < \varepsilon,$$

откуда и следует сходимость интеграла (5) [n° 286].

Можно заменить высказанные условия другими, потребовав бо́льшего от множителя f, но зато облегчив условие, налагаемое на множитель g. Именно, *пусть теперь*

(II) 1′) *существует несобственный интеграл*

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{A \to \infty} \Phi(A);$$

2′) *функция* $g(x)$ *оказывается ограниченной*:

$$|g(x)| \leqslant L \qquad (L = \mathrm{const}\,;\ a \leqslant x < \infty).$$

И при этих условиях интеграл (5) *сходится.*

На этот раз в (6) вторые множители ограничены, а первые — за счет A и A' — могут быть сделаны сколь угодно малыми, что приводит к тому же результату.

Обратимся к примерам.

Интегралы

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}}\, dx, \qquad \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\lambda}}\, dx$$

(при $a > 0$ и $\lambda > 0$) сходятся по признаку (I). За функцию $f(x)$ здесь можно взять, соответственно, $\sin x$ или $\cos x$, так как

$$\left| \int_a^{A} \sin x\, dx \right| = |\cos a - \cos A| \leqslant 2, \quad \left| \int_a^{A} \cos x\, dx \right| \leqslant 2,$$

хотя в бесконечном промежутке эти функции и не интегрируемы [n° 283, 6)]; роль $g(x)$ играет $\frac{1}{x^{\lambda}}$.

При $\lambda > 1$ эти интегралы сходятся абсолютно, поскольку сходится [n° 283, 4)] интеграл

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda},$$

а $|\sin x|$ и $|\cos x| \leqslant 1$. Наоборот, при $\lambda \leqslant 1$ оба интеграла сходятся неабсолютно. Для того чтобы доказать это, например, для интеграла

$$\int_a \frac{\sin x}{x} dx,$$

нужно установить, что интеграл

$$\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$$

расходится. Действительно, если бы этот интеграл сходился, то, ввиду неравенства

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x$$

и подавно [n° 285, теорема 1] сходился бы и интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x} dx;$$

прибавив к нему заведомо сходящийся интеграл

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx,$$

мы пришли бы к заключению, что сходится интеграл

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{dx}{x},$$

чего на деле нет [n° 283, 4)].

Замечание. Теперь, когда мы установили сходимость интегралов

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{и} \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x} dx,$$

мы можем, наконец, уточнить определение неэлементарных функций $\operatorname{si} x$ («интегральный синус») и $\operatorname{ci} x$ («интегральный косинус»), о которых мы упоминали в первом томе (стр. 316). Именно, полагают

$$\operatorname{si} x = -\int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt, \qquad \operatorname{ci} x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt.$$
$$(x \geqslant 0) \qquad\qquad (x > 0)$$

Если, например, вторую из этих формул написать в виде:

$$\operatorname{ci} x = \int_1^x \frac{\cos t}{t}\, dt - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt,$$

то — по известному свойству определенного интеграла [n° 183, 12°] — ясно, что производная от $\operatorname{ci} x$ действительно равна $\frac{\cos x}{x}$.

§ 2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

288. Определение интегралов от неограниченных функций. Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, заданную в конечном промежутке $[a, b]$, но неинтегрируемую в этом промежутке. Предположим более определенно, что она интегрируема в любом промежутке $[a, b-\eta]$, где $0<\eta<b-a$, но оказывается неинтегрируемой в каждом промежутке $[b-\eta, b]$ слева от точки b. Точка b носит при этом название особой точки.

Можно показать, что вблизи точки b функция $f(x)$ тогда необходимо будет неограниченной, и именно в этом причина того, что вблизи b она неинтегрируема. Обычным для нас будет случай, когда функция $f(x)$ в точке b «обращается в бесконечность» (напомним, что под этим разумеется лишь то, что при $x \to b$ функция стремится к бесконечности).

Конечный или бесконечный предел интеграла $\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ при $\eta \to 0$ называют (несобственным) интегралом функции $f(x)$ в промежутке от a до b и обозначают:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0} \int_a^{b-\eta} f(x)\,dx. \tag{1}$$

В случае существования такого конечного предела говорят, что интеграл (1) сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в промежутке $[a, b]$. В противном случае про интеграл говорят, что он расходится.

Пример. 1) Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ограничена и интегрируема в любом промежутке $[0, 1-\eta]$ $(0<\eta<1)$, и

$$\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\eta).$$

В точке $x=1$ функция обращается в бесконечность. Очевидно, точка $x=1$ и является особой.

Так как вычисленный интеграл при $\eta \to 0$ стремится к пределу $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, то существует несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \to 0} \int_0^{1-\eta} = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ ограничена и интегрируема в любом промежутке $[a+\eta', b]$ $(0 < \eta' < b-a)$, но оказывается неинтегрируемой в каждом промежутке $[a, a+\eta']$ справа от точки a (особая точка). Тогда *(несобственный) интеграл функции $f(x)$ от a до b определяется равенством*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta' \to 0} \int_{a+\eta'}^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Если обе точки a и b оказываются особыми, то *определение интеграла от a до b дается равенством*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta_1 \to 0 \\ \eta_2 \to 0}} \int_{a+\eta_1}^{b-\eta_2} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Определение (3) можно заменить таким:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

в предположении, что $a < c < b$ и оба несобственных интеграла справа существуют (при этом выбор точки c роли не играет) *).

По отношению к несобственным интегралам (2) и (3) сохраняется та же терминология, что и выше.

Примеры.

2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, особая точка -1,

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \to 0} \int_{-1+\eta'}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta' \to 0} [-\arcsin(-1+\eta')] = \frac{\pi}{2};$$

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, две особые точки -1 и 1,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 + \int_0^1 = \pi.$$

---

*) См. сноску на стр. 111.

Нетрудно понять, как определяется несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при наличии любого (конечного) числа особых точек.

Наконец, рассмотрим функцию $f(x)$, заданную в бесконечном промежутке, например, в $[a, \infty]$, и имеющую в нем конечное число особых точек *), вблизи которых она перестает быть интегрируемой. Предположим, что в каждом конечном промежутке $[a, A]$ интеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ существует, как собственный или как несобственный, согласно данному выше определению. Тогда, переходя еще раз к пределу при $A \to \infty$, можно равенством (1) [n°**282**] определить несобственный интеграл в промежутке $[a, \infty]$.

289. Применение основной формулы интегрального исчисления. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $[a, b)$, в то время как b служит для нее особой точкой. Для $f(x)$ в промежутке $[a, b)$ существует первообразная функция $F(x)$, и

$$\int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx = F(b-\eta) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b-\eta},$$

так что сходимость несобственного интеграла (1) равносильна существованию конечного предела $\lim\limits_{\eta \to 0} F(b-\eta)$. Если последний существует, то его естественно принять за значение $F(b)$ первообразной функции при $x = b$, достигнув этим непрерывности $F(x)$ во всем промежутке $[a, b]$. Для вычисления интеграла (1) мы имеем тогда формулу обычного вида:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{4}$$

Та же формула имеет место и в том случае, если особая точка лежит внутри промежутка или при наличии нескольких особых точек, но (это нужно твердо помнить) при непременном условии, чтобы первообразная функция $F(x)$, имеющая $f(x)$ своей производной всюду, исключая особые точки, *была непрерывна и в этих последних*. Существование такой первообразной обеспечивает сходимость несобственного интеграла. Если же первообразная на конце промежутка или внутри него обращается в бесконечность, то интеграл расходится.

---

*) Особых точек может быть и бесконечное множество, лишь бы в каждом конечном промежутке $[a, A]$ $(A > a)$ их было лишь конечное число (которое может расти до бесконечности вместе с A).

Обратимся к примерам.

4) Исследуем, при каких значениях показателя $\lambda > 0$ сходится несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \qquad (b > a).$$

Предполагая $\lambda \neq 1$, имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}(x-a)^{1-\lambda}\Big|_a^b,$$

так что интеграл сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda > 1$: первообразная на конце $x = a$ обращается в бесконечность. По той же причине расходится интеграл и при $\lambda = 1$:

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \ln(x-a)\Big|_a^b.$$

5) Аналогичный результат может быть установлен относительно интеграла

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \qquad (b > a,\ \lambda > 0),$$

который несущественно разнится от предыдущего.

6) Для интеграла $\int_0^1 \ln x\, dx$ особая точка $x = 0$. Имеем

$$\int_0^1 \ln x\, dx = x\ln x - x\Big|_0^1 = -1,$$

так как при $x \to 0$ первообразная имеет предельное значение 0.

290. Условия и признаки сходимости интеграла. Мы остановимся лишь на случае, связанном с определением (1), так как перефразировка для других случаев не представляет трудностей. Ввиду полной аналогии с несобственным интегралом, распространенным на бесконечный промежуток $[a, \infty]$, мы не будем перечислять простейших теорем [ср. n° **284**], а по вопросу о существовании интеграла ограничимся формулировкой некоторых основных положений — их доказательства аналогичны приведенным выше. Во всех случаях интегрируемость (в собственном смысле!) рассматриваемых функций в любом промежутке $[a, b-\eta]$ $(\eta > 0)$ предполагается, и единственно точка $x = b$ является особой.

Как и в n° **285**:

Для существования несобственного интеграла (1) *в случае положительной функции* $f(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы интеграл* $\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ $(\eta > 0)$ *оставался ограниченным сверху:*

$$\int_a^{b-\eta} f(x)\,dx \leqslant L \qquad (L = \text{const}).$$

Если же это условие не выполнено, то интеграл (1) *имеет значением* $+\infty$.

Теоремы сравнения 1 и 2 из n° **285** для положительных функций и здесь имеют место. Мы не станем их воспроизводить, но сформулируем основанные на них признаки.

Пусть для достаточно близких к b *значений* x *функция* $f(x)$ *имеет вид:*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\lambda}} \qquad (\lambda > 0).$$

Тогда: 1) *если* $\lambda < 1$ *и* $\varphi(x) \leqslant c < \infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится,* 2) *если же* $\lambda \geqslant 1$ *и* $\varphi(x) \geqslant c > 0$, *то этот интеграл расходится.*

Более частная форма, удобная на практике:

Если при $x \to b$ *функция* $f(x)$ *является бесконечно большой порядка* $\lambda > 0$ $\left(\text{по сравнению с } \frac{1}{b-x}\right)$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится или расходится в зависимости от того, будет ли* $\lambda < 1$ *или* $\lambda \geqslant 1$.

Примеры.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$.

Подинтегральная функция при $x \to 1$ представляет бесконечно большую порядка $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \to \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \quad \text{при } x \to 1.$$

Следовательно, интеграл сходится.

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^p\,dx \qquad (p \neq 0).$

Если $p>0$, то особой точкой является $\frac{\pi}{2}$, при $p<0$ особая точка 0. В обоих случаях подинтегральное выражение является бесконечно большой порядка $|p|$. Итак, сходимость при $|p|<1$ и расходимость при $|p|>1$.

3) $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$

При $a<1$ особая точка 0, при $b<1$ особая точка 1. Разложим предложенный интеграл на два, например, так: $\int\limits_0^1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}+\int\limits_{\frac{1}{2}}^1$. Так как подинтегральная функция при $x\to 0$ является бесконечно большой (если $a<1$) порядка $1-a$, то первый интеграл существует лишь при условии $1-a<1$, т. е. $a>0$; аналогично, второй существует при $b>0$. Итак, предложенный интеграл сходится в том и только в том случае, если одновременно $a>0$ и $b>0$.

4) $\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx.$

Особые точки ∞ и 0 (при $p<1$). $\int\limits_0^1$ существует лишь при $p>0$ (бесконечно большая порядка $1-p$ по отношению к $\frac{1}{x}$. $\int\limits_1^\infty$ существует, каково бы ни было p, так как взяв $\lambda>1$, имеем

$$\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^\lambda}}=\frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x}\to 0 \quad \text{при } x\to\infty:$$

$\int\limits_0^\infty$ существует при $p>0$.

Замечание. Мы упоминали в первом томе (стр. 316) о неэлементарной функции $\operatorname{li} y=\int\frac{dy}{\ln y}$ («интегральный логарифм»). Чтобы уточнить содержащуюся в интеграле произвольную постоянную, полагают

$$\operatorname{li} y=\int\limits_0^y\frac{dt}{\ln t}.$$

При $y<1$ этот интеграл существует как собственный. Однако при $y>1$ интеграл теряет смысл — даже как несобственный, так как при $t=1$ подинтегральная функция является бесконечно большой первого порядка

$\left(\text{по сравнению с } \frac{1}{t-1}\right)$. В этом случае написанный выше интеграл понимают как предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{y}\right\}\frac{dt}{\ln t}.$$

На доказательстве существования такого предела останавливаться не будем.

В случае знакопеременной функции, применяя признак Больцано — Коши, имеем такое общее условие сходимости:

Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, *где* b — *особая точка, необходимо и достаточно, чтобы каждому числу* $\varepsilon>0$ *отвечало такое число* $\delta>0$, *чтобы при* $0<\eta<\delta$ *и* $0<\eta'<\delta$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Отсюда, как и выше, вытекает:

Если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, *то и подавно сходится интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому и здесь особо отличают случай, когда наряду с интегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится и $\int_a^b |f(x)|\,dx$; тогда первый интеграл называют абсолютно сходящимся, а функцию $f(x)$ — абсолютно интегрируемой в промежутке $[a, b]$.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

291. Интегрирование по частям в случае несобственных интегралов. Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ определены и непрерывны вместе со своими первыми производными во всех точках

промежутка $[a, b]$, исключая точку b (которая может быть равна и $+\infty$). Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du,$$

если под двойной подстановкой понимать разность

$$\lim_{x\to b} u(x)\cdot v(x) - u(a)\cdot v(a).$$

При этом предполагается, что из трех входящих в равенство выражений (два интеграла и двойная подстановка) имеют конечное значение два: для третьего это уже отсюда вытекает.

В самом деле, взяв $a < x_0 < b$, напишем обычную формулу интегрирования по частям для промежутка $[a, x_0]$, где все интегралы — собственные:

$$\int_a^{x_0} u\,dv = [u(x_0)\cdot v(x_0) - u(a)\cdot v(a)] - \int_a^{x_0} v\,du.$$

Пусть теперь в этом равенстве x_0 стремится к b. По условию, два из входящих в него выражений имеют конечные пределы при $x_0 \to b$ *). Следовательно, имеет конечный предел также третье выражение, и доказываемое равенство оправдывается с помощью предельного перехода.

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = x\cdot\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$$

— интегрированием по частям здесь удалось свести несобственный интеграл к собственному и тем доказать существование несобственного интеграла.

292. Замена переменных в несобственных интегралах. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в конечном или бесконечном промежутке $[a, b)$ и, следовательно, интегрируема в собственном смысле в каждой его части, не содержащей точки b, которая может быть и $+\infty$; эта точка, по предположению, является единственной особой точкой для функции $f(x)$.

---

*) Это верно и в том случае, когда какой-либо из интегралов $\int_a^b$ оказывается собственным [n° 183, 11°].

Рассмотрим теперь монотонно возрастающую функцию $x=\varphi(t)$, непрерывную вместе со своей производной $\varphi'(t)$ в промежутке $[\alpha, \beta)$, где β может быть и $+\infty$, и допустим, что $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$. Последнее равенство надлежит понимать в том смысле, что $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=b$.

При этих условиях имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \tag{1}$$

в предположении, что сходится один из этих интегралов (сходимость другого отсюда уже вытекает). Второй интеграл будет либо собственным, либо несобственным — с единственной особой точкой β.

По теореме об обратной функции [n° 71] ясно, что и t можно рассматривать как монотонно возрастающую и непрерывную функцию от x в $[a, b): t=\theta(x)$, причём $\lim\limits_{x\to b}\theta(x)=\beta$.

Пусть теперь x_0 и t_0 будут произвольные, но соответствующие одно другому значения x и t из промежутков (a, b) и (α, β). Тогда с помощью замены переменной в собственном интеграле будем иметь

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx=\int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Если сходится, скажем, второй из интегралов (1), то станем приближать *произвольным образом* x_0 к b; при этом $t_0=\theta(x_0)$ устремится к β, и мы установим формулу (1) одновременно с доказательством сходимости интеграла слева.

Наше рассуждение одинаково применимо в случае *монотонно убывающей* функции $\varphi(t)$, когда $\alpha>\beta$ *). Так же исчерпываются и другие возможные случаи распределения особых точек. При расстановке пределов в преобразованном интеграле всегда следует помнить, что *нижний предел α должен соответствовать нижнему пределу a, а верхний предел β — верхнему пределу b, независимо от того, будет ли $\alpha<\beta$ или $\alpha>\beta$.*

Примеры. 1) Вычислить интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

---

*) И в случае несобственных интегралов, при $\alpha>\beta$, мы полагаем

$$\int_\alpha^\beta=-\int_\beta^\alpha.$$

подстановкой

$$x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$$

Здесь $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, и искомый интеграл приводится к собственному интегралу

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi.$$

2) Для установления сходимости интеграла $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ выполним в нем замену переменной: $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, $a = \alpha = 0$, $b = \beta = \infty$. Мы получим заведомо сходящийся [n° 287] интеграл $\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$, следовательно, сходится и предложенный интеграл. Интересно отметить, что подинтегральная функция в нем при $x \to \infty$ не стремится ни к какому пределу, колеблясь между -1 и $+1$.

Аналогично исчерпывается вопрос о сходимости интеграла $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$.

3) Вычисление интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

может быть очень упрощено применением целесообразных подстановок.

Прежде всего, к нему приводится интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$$

подстановкой $x = \frac{1}{t}$ ($a = 0$, $b = \infty$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$), так что можно написать

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

Если теперь прибегнуть к подстановке $x - \frac{1}{x} = z$ ($a = 0$, $b = \infty$, $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$), то сразу получим

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

293. Вычисление интегралов с помощью искусственных приемов. Мы вычислим несколько важных несобственных интегралов с применением искусственных приемов: соответствующие первообразные функции здесь в конечном виде не выражаются, и ими воспользоваться нельзя. Все эти интегралы были известны еще математикам XVIII века (в частности — Эйлеру), но — без строгого вывода.

1°. Поставим себе задачей вычислить интеграл

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx,$$

в существовании которого мы уже убедились [n° 291].

Это вычисление основано на использовании замены переменной. Имеем, полагая $x=2t$:

$$J=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t\, dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t\, dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t\, dt.$$

Подставляя в последнем интеграле $t=\frac{\pi}{2}-u$, приведем его к виду $2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u\, du$, так что, окончательно, для определения J получаем уравнение

$$J=\frac{\pi}{2}\cdot \ln 2+2J, \quad \text{откуда} \quad J=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

2°. Обратимся к вычислению интеграла

$$K=\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

встречающегося в теории вероятностей*). С этой целью предварительно докажем некоторые неравенства.

Обычными в дифференциальном исчислении методами нетрудно установить, что функция $(1+t)e^{-t}$ достигает своего наибольшего значения 1 при $t=0$. Следовательно, для $t\neq 0$ будет

$$(1+t)e^{-t}<1.$$

Полагая здесь $t=\pm x^2$, мы получим

$$(1-x^2)e^{x^2}<1 \quad \text{и} \quad (1+x^2)e^{-x^2}<1,$$

откуда

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}.$$

---

*) Существование этого интеграла не вызывает сомнений, так как (при $x>1$) $e^{-x^2}<e^{-x}$, а интеграл для e^{-x} вычисляется непосредственно.

Ограничив в первом из этих неравенств изменение x промежутком $(0, 1)$ (так что $1-x^2>0$), а во втором, считая $x>0$ любым, возводим все эти выражения в степень с любым натуральным показателем n; это дает нам *)

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2} \quad \text{и} \quad e^{-nx^2}<\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$
$$(0<x<1) \qquad\qquad (x>0)$$

Интегрируя первое неравенство в промежутке от 0 до 1, а второе — от 0 до ∞, получим

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx<\int_0^1 e^{-nx^2}\,dx<\int_0^\infty e^{-nx^2}dx<\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Но

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot K \quad (\text{подстановка } u=\sqrt{n}\cdot x),$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,dt=\frac{2n!!}{(2n+1)!!}$$

(подстановка $x=\cos t$)

и, наконец,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t\,dt=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(подстановка $x=\operatorname{ctg} t$).

Мы воспользовались здесь известными выражениями для $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$ [n° 187, (5)]. Таким образом, искомое значение K может быть заключено между следующими двумя выражениями:

$$\sqrt{n}\cdot\frac{2n!!}{(2n+1)!!}<K<\sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

так что, возводя в квадрат и преобразуя:

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}<K^2<\frac{n}{2n-1}\cdot\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right]^2(2n-1)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Из формулы Валлиса [n° 188]:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$$

---

*) Для неравенств с положительными членами возвышение в натуральную степень почленно — допустимо.

легко усмотреть теперь, что оба крайних выражения при $n \to \infty$ стремятся к одному и тому же пределу $\frac{\pi}{4}$, следовательно,

$$K^2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (так как } K > 0).$$

3°. Рассмотрим, наконец, интеграл

$$L = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

сходимость которого нам уже известна [n° 287]. Если определение этого несобственного интеграла

$$L = \lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx$$

истолковать «на языке последовательностей» [n° 32], то, в частности, можно положить

$$L = \lim_{n \to \infty} \int_0^{n \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

С другой стороны, вместо предела последовательности можно [n° 234] искать сумму бесконечного ряда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \left\{\int_0^{\pi} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\right\} + \left\{\int_0^{\frac{3\pi}{2}} - \int_0^{\pi}\right\} + \ldots = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \ldots,$$

так что окончательно

$$L = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{\nu \cdot \frac{\pi}{2}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Положив $\nu = 2\mu$ или $2\mu - 1$ и прибегнув, соответственно, к подстановке $x = \mu\pi + t$ или $x = \mu\pi - t$, будем иметь:

$$\int_{2\mu \cdot \frac{\pi}{2}}^{(2\mu+1)\frac{\pi}{2}} = (-1)^{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\mu\pi + t}\, dt$$

и

$$\int_{(2\mu-1)\frac{\pi}{2}}^{2\mu \cdot \frac{\pi}{2}} = (-1)^{\mu-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\mu\pi - t}\, dt.$$

Отсюда

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\,dt+\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\sin t\,dt.$$

Так как ряд

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)$$

в промежутке $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ сходится равномерно, ибо мажорируется сходящимся рядом $\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2-\frac{1}{4}}$, то его можно — по умножении всех его членов на ограниченную функцию $\sin t$ — интегрировать почленно. Это дает нам право написать выражение для L в виде:

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cdot\left[\frac{1}{t}+\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\right]dt.$$

Как мы увидим впоследствии [п° 406, 3), замечание], выражение в скобках равно $\frac{1}{\sin t}$, представляя собой так называемое «разложение на простые дроби» для этой функции. Принимая этот факт без доказательства уже сейчас, для искомого интеграла окончательно получим

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

Приведенный изящный вывод принадлежит Лобачевскому, который первым обратил внимание на нестрогость тех приемов, с помощью которых этот важный интеграл вычислялся раньше.

На деле Лобачевский своим методом получил даже более общую формулу:

$$\int_0^{\infty}f(x)\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx,$$

в предположении, что $f(x+\pi)=f(x)$ и $f(\pi-x)=f(x)$; в рассмотренном случае $f(x)=1$.

Замечание. Найденный результат позволяет заключить, что

$$L(a)=\int_0^{\infty}\frac{\sin at}{t}dt=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{при } a>0,\\ 0 & \text{при } a=0,\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при } a<0.\end{cases}$$

При $a>0$ этот интеграл приводится к L простой подстановкой $x=at$; изменение знака a влечет за собой изменение знака интеграла, а при $a=0$ равенство нулю интеграла очевидно.

Это простое замечание, принадлежащее Фурье, произвело сильное впечатление на его современников: функция от a, по-разному выражаемая при различных значениях этой переменной, в то же время допускает и единое «аналитическое выражение»! [Ср. n° 18, 3° и ниже n° 422 и 423].

ГЛАВА ВОСЕМНАДЦАТАЯ

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ

294. Постановка задачи. Рассмотрим функцию $f(x, y)$ двух переменных, определенную для всех значений x в некотором — конечном или бесконечном — промежутке $[a, b]$, и всех значений y в множестве $\mathcal{Y}=\{y\}$. Пусть при каждом постоянном значении y из $\mathcal{Y}$ функция $f(x, y)$ будет интегрируема в промежутке $[a, b]$, в собственном или несобственном смысле. Тогда интеграл

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{1}$$

будет, очевидно, функцией от в с п о м о г а т е л ь н о й переменной или п а р а м е т р а y.

Говоря в n° **269** о последовательности функций $\{f_n(x)\}$, мы рассматривали интегралы

$$I_n=\int_a^b f_n(x)\,dx,$$

которые представляют собой частный случай интегралов (1): в роли параметра здесь фигурирует натуральный указатель n.

По отношению к функции $I(y)$ естественно возникает ряд вопросов — о существовании и выражении ее предела при определенном предельном переходе, в частности, об ее непрерывности по y, об ее дифференцируемости и выражении для ее производной, наконец, об ее интеграле. Всем этим вопросам и посвящена настоящая глава.

Изучение свойств функции, выраженной интегралом (1), зависящим от параметра, может представить самостоятельный интерес [в этом отношении см., например, § 4]. Но, помимо того, эти свойства, как читатель увидит, имеют и многообразные применения, в особенности к вопросу о вычислении несобственных интегралов.

295. Равномерное стремление к предельной функции. Важную роль в предстоящих исследованиях будет играть указанное в заголовке понятие. Пусть функция $f(x, y)$ определена, в общем случае, в двумерном множестве $\mathcal{M} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ означают множества значений, принимаемых порознь переменными x и y, причем $\mathcal{Y}$ имеет своей точкой сгущения, скажем, конечное число y_0.

Если: 1) *для функции $f(x, y)$ при $y \to y_0$ существует конечная предельная функция*

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x) \qquad (x \text{ из } \mathcal{X}) \tag{2}$$

и 2) *для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое не зависящее от x число $\delta > 0$, что*

$$\text{при } |y - y_0| < \delta \text{ будет } |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \tag{3}$$

сразу для всех x из $\mathcal{X}$, то говорят, что функция $f(x, y)$ стремится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно относительно x в области $\mathcal{X}$.

Нетрудно перефразировать это определение и на тот случай, когда y_0 есть несобственное число, например, $+\infty$: при этом лишь неравенство вида $|y - y_0| < \delta$ заменяется неравенством вида $y_0 > \Delta$. В главе XVI [n° **264**] мы имели уже дело с частным случаем такого равномерного приближения к предельной функции; там речь шла о функции $f_n(x)$, содержащей в качестве параметра натуральный указатель n.

В n° **265**, имея дело с последовательностью функций, мы установили, что для равномерной сходимости необходимо и достаточно, так сказать, «равномерное выполнение» принципа сходимости. То же можно сделать и в общем случае. Именно, если ограничиться предположением, что y_0 конечно:

1°. *Для того чтобы функция $f(x, y)$ при $y \to y_0$ имела предельную функцию и стремилась к ней равномерно относительно x в области $\mathcal{X}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое не зависящее от x число $\delta > 0$, чтобы неравенство*

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon \tag{4}$$

выполнялось для всех x из $\mathcal{X}$ сразу, лишь только

$$|y - y_0| < \delta, \quad |y' - y_0| < \delta \quad (y, y' \text{ из } \mathcal{Y}). \tag{5}$$

[В случае $y_0 = +\infty$ взамен последних неравенств появляются неравенства $y > \Delta$, $y' > \Delta$.]

Необходимость. Пусть имеет место равномерная сходимость. Заменив в определении ε на $\frac{\varepsilon}{2}$ и соответственно выбрав δ,

возьмем теперь два значения y и y' из $\mathcal{Y}$ так, чтобы выполнялись условия (5). Тогда будем иметь, каково бы ни было x,

$$|f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |\varphi(x) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда и следует (4).

Достаточность. Если упомянутое условие выполнено, то прежде всего ясно существование предельной функции (2). Переходя затем к пределу в неравенстве (4) при $y' \to y_0$ (причем y фиксировано так, что $|y - y_0| < \delta$), получим:

$$|\varphi(x) - f(x, y)| \leqslant \varepsilon.$$

Этим и установлено равномерное стремление функции $f(x, y)$ к предельной функции $\varphi(x)$.

Пусть теперь множество $\mathcal{X}$ представляет собою конечный промежуток $[a, b]$. По теореме 1* n° **266**, если последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных функций равномерно сходится к предельной функции, то и последняя необходимо будет непрерывной; это утверждение переносится и на общий случай:

2°. *Если функция $f(x, y)$ при любом y из $\mathcal{Y}$ непрерывна по x в промежутке $\mathcal{X} = [a, b]$ и при $y \to y_0$ равномерно стремится к предельной функции $\varphi(x)$, то и эта последняя функция также будет непрерывна.*

Действительно, стоит лишь взять любую последовательность $\{y_n\}$ из $\mathcal{Y}$, имеющую пределом y_0, чтобы соответствующая последовательность функций $\{f(x, y_n)\}$ равномерно сходилась к $\varphi(x)$: например, при конечном y_0, неравенство

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

будет выполняться для всех x из $\mathcal{X}$, лишь только n настолько велико, что $|y_n - y_0| < \delta$ [см. (3)]. Остается лишь сослаться на упомянутую теорему.

Легко обобщается и теорема Дини [n° **267**, теорема 2*]; на этот раз мы предполагаем, что все $y < y_0$.

3°. *Пусть функция $f(x, y)$ при любом y из $\mathcal{Y}$ будет непрерывна по x в промежутке $\mathcal{X} = [a, b]$ и при возрастании y, монотонно возрастая, стремится к непрерывной же предельной функции $\varphi(x)$. Тогда стремление это необходимо будет равномерным относительно x в промежутке $\mathcal{X}$.*

Для доказательства выделим из $\mathcal{Y}$ монотонно возрастающую последовательность $\{y_n\}$ значений y, стремящихся к y_0, и рассмотрим соответствующую последовательность функций $\{f(x, y_n)\}$, очевидно, также монотонно возрастающих вместе с n.

Теорема Дини позволяет утверждать, что эта последовательность сходится к $\varphi(x)$ равномерно относительно x в промежутке $\mathcal{X}$.

Следовательно, по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что неравенство

$$|\varphi(x) - f(x, y_{n_0})| < \varepsilon$$

окажется выполненным сразу для всех x из $\mathcal{X}$. Ввиду монотонного возрастания функции f вместе с y, тогда подавно выполняется и неравенство

$$|\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon$$

лишь только $y > y_{n_0}$; этим доказывается наше утверждение.

Хотя установленный частный признак равномерного приближения и кажется очень узким, но он нередко бывает полезен, избавляя от необходимости иным путем убеждаться в наличии равномерного приближения.

296. Предельный переход под знаком интеграла. Обращаемся теперь к рассмотрению интеграла (1), зависящего от параметра y, ограничиваясь вначале случаем конечного промежутка $[a, b]$ и непрерывной функции.

Предполагая, что область $\mathcal{Y}$ изменения параметра y имеет точку сгущения y_0, поставим вопрос о пределе функции (1) при $y \to y_0$.

Теорема 1. Если функция $f(x, y)$ при постоянном y непрерывна по x в $[a, b]$ и при $y \to y_0$ стремится к предельной функции (2) равномерно относительно x, то имеет место равенство

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{6}$$

Доказательство*). Непрерывность предельной функции $\varphi(x)$ уже известна [n° 295, 2°]. Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, найдем такое число $\delta > 0$, чтобы имело место (3). Тогда при $|y - y_0| < \delta$ будем иметь

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^b \varphi(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b [f(x, y) - \varphi(x)]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon(b - a),$$

что и доказывает формулу (6).

Формула (6) может быть переписана в виде:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx.$$

*) Для определенности мы предполагаем, что y_0 конечно.

При наличии ее говорят, что *предельный переход по параметру допустим «под знаком интеграла»*.

Предполагая, что все $y<y_0$, имеем на основании обобщенной теоремы Дини [n° **295**, 3°]:

Следствие. *Если функция $f(x, y)$ при постоянном y непрерывна по x в $[a, b]$ и при возрастании y стремится к непрерывной же предельной функции, монотонно возрастая, то справедлива формула* (6).

В предположении, что область $\mathcal{Y}$ сама представляет собой конечный промежуток $[c, d]$, рассмотрим в заключение вопрос о непрерывности функции (1).

Теорема 2. *Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна, как функция от двух переменных, в прямоугольнике $[a, b; c, d]$, то интеграл* (1) *будет непрерывной функцией от параметра y в промежутке $[c, d]$.*

Доказательство. Ввиду равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ [n° **137**], по произвольному $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что из неравенств

$$|x''-x'|<\delta, \quad |y''-y'|<\delta$$

следует неравенство

$$|f(x'', y'')-f(x', y')|<\varepsilon.$$

Положим, в частности, $x'=x''=x$, $y'=y_0$, $y''=y$; тогда при $|y-y_0|<\delta$, каково бы ни было x, будем иметь

$$|f(x, y)-f(x, y_0)|<\varepsilon.$$

Таким образом, функция $f(x, y)$, при стремлении y к любому частному значению y_0, стремится к $f(x, y_0)$ равномерно относительно x. В таком случае, по теореме 1,

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)\,dx=\int_a^b f(x, y_0)\,dx$$

или

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0),$$

что и доказывает наше утверждение.

297. Дифференцирование под знаком интеграла. При изучении свойств функции (1), которая задана интегралом, содержащим параметр y, важное значение имеет вопрос о производной этой функции по параметру.

При известных предположениях для вычисления производной $I'(y)$ может быть применена формула

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx \tag{7}$$

или — если воспользоваться более выразительными обозначениями Коши —

$$D_y \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b D_y f(x, y)\,dx.$$

Если такая перестановка знаков производной по y и интеграла по x допустима, то говорят, что функцию (1) *можно дифференцировать по параметру «под знаком интеграла»*.

Впервые подобный метод Лейбниц сообщил в 1697 г. в письме к Иог. Бернулли, чем привел последнего в восторг. Самое вычисление производной по указанной формуле и получило название «правила Лейбница».

Следующая теорема устанавливает простые достаточные условия для применимости этого правила.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x, y)$, определенная в прямоугольнике $[a, b; c, d]$, будет непрерывна по x в $[a, b]$ при любом постоянном y в $[c, d]$. Предположим, далее, что во всей области существует частная производная $f'_y(x, y)$, непрерывная как функция двух переменных*). Тогда при любом y из $[c, d]$ имеет место формула* (7).

Непрерывность функции $f(x, y)$ по x обеспечивает существование интеграла (1).

Фиксируя любое значение $y = y_0$, придадим ему приращение $\Delta y = k$. Тогда

$$I(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\,dx, \quad I(y_0 + k) = \int_a^b f(x, y_0 + k)\,dx,$$

так что

$$\frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k} = \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}\,dx. \tag{8}$$

Интеграл справа зависит от параметра k. Нам предстоит доказать, что при $k \to 0$ здесь допустим предельный переход под знаком

---

*) Из этих условий, собственно, уже вытекает и непрерывность функции $f(x, y)$ по обоим аргументам, но мы ею пользоваться не будем.

интеграла. Этим будет установлено и существование производной

$$I'(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{I(y_0 + k) - I(y_0)}{k}$$

и наличие требуемого равенства

$$I'(y_0) = \lim_{k \to 0} \int_a^b \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} dx = \int_a^b f'_y(x, y_0)\, dx.$$

С этой целью сначала по формуле Лагранжа напишем

$$\frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} = f'_y(x, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1). \tag{9}$$

Пользуясь же равномерной непрерывностью функции $f'_y(x, y)$, по произвольному $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что при

$$|x'' - x'| < \delta \quad \text{и} \quad |y'' - y'| < \delta$$

будет выполняться неравенство

$$|f'_y(x'', y'') - f'_y(x', y')| < \varepsilon.$$

Полагая здесь $x' = x'' = x$, $y' = y_0$, $y'' = y_0 + \theta k$ и считая $|k| < \delta$, получим, с учетом (9), что сразу для всех x будет

$$\left| \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k} - f'_y(x, y_0) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда ясно, что подинтегральная функция (9) при $k \to 0$ равномерно относительно x стремится к предельной функции $f'_y(x, y_0)$. Этим, по теореме 1, и оправдывается предельный переход под знаком интеграла (8).

298. Интегрирование под знаком интеграла. Поставим, наконец, вопрос об интеграле по y от функции (1), скажем, в промежутке $[c, d]$.

Нас особо будет интересовать случай, когда этот интеграл выразится формулой:

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)\, dy \right\} dx,$$

которую — без скобок — пишут обычно так:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{10}$$

При наличии ее говорят, что функцию (1) *можно интегрировать по параметру* y «*под знаком интеграла*» (взятого по переменной x).

Простейшие условия, достаточные для равенства двух повторных интегралов (10), дает

Теорема 4. *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна (по обеим переменным) в прямоугольнике* $[a, b;\ c, d]$, *то имеет место формула* (10).

Докажем более общее равенство

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\,dy, \qquad (10a)$$

где $c \leqslant \eta \leqslant d$.

В левой и правой его частях мы имеем две функции от параметра η; вычислим их производные по η.

Внешний интеграл в левой части имеет подинтегральную функцию (1), непрерывную по y в силу теоремы 2. Поэтому его производная по переменному верхнему пределу будет равна подинтегральной функции, вычисленной при $y = \eta$, т. е. интегралу

$$I(\eta) = \int_a^b f(x, \eta)\,dx.$$

В правой части (10a) стоит интеграл

$$\int_a^b \varphi(x, \eta)\,dx, \quad \text{где} \quad \varphi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y)\,dy;$$

функция $\varphi(x, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Действительно, $\varphi(x, \eta)$ непрерывна по x, в силу теоремы 2. *) Затем, производная

$$\varphi'_\eta(x, \eta) = f(x, \eta)$$

непрерывна как функция двух переменных. Поэтому к упомянутому интегралу применимо правило Лейбница:

$$D_\eta \int_a^b \varphi(x, \eta)\,dx = \int_a^b \varphi'_\eta(x, \eta)\,dx = \int_a^b f(x, \eta)\,dx = I(\eta).$$

Таким образом, левая и правая части равенства (10a), как функции от η, имеют равные производные, следовательно, могут разниться разве лишь на постоянную. Но при $\eta = c$ оба упомянутых выра-

*) Здесь роль параметра играет x.

жения обращаются, очевидно, в нуль; следовательно, они тождественны при всех значениях η, и равенство (10а) доказано.

При $\eta = d$ из него, в частности, и получается равенство (10).

Замечание. Это равенство впервые было указано Эйлером в 1769 г. (напечатано в следующем году). Оно лишь иллюстрируется примером, «так как основание этого вполне ясно из природы дифференциалов и интегралов».

299. **Случай, когда и пределы интеграла зависят от параметра.** Обратимся к рассмотрению более сложного случая, когда не только подинтегральное выражение содержит параметр, но и самые пределы интеграла зависят от него. В этом случае интеграл имеет вид

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx. \tag{11}$$

Ограничимся исследованием вопроса о непрерывности и дифференцируемости по параметру подобного интеграла.

Теорема 5. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна в прямоугольнике* $[a, b; c, d]$, *а кривые*

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

непрерывны и не выходят за его пределы. Тогда интеграл (11) *представляет собой непрерывную функцию от* y *в* $[c, d]$.

Если y_0 есть любое частное значение y, то интеграл (11) можно написать в виде

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y)\, dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)\, dx. \tag{12}$$

Первый интеграл, в котором пределы уже постоянны, при $y \to y_0$ стремится к

$$I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\, dx,$$

по теореме 2. Остальные же два интеграла допускают оценку

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx \right| \leqslant M \cdot |\beta(y) - \beta(y_0)|,$$

$$\left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y)\, dx \right| \leqslant M \cdot |\alpha(y) - \alpha(y_0)|$$

где $M = \max |f(x, y)|$, и — в силу непрерывности функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ — при $y \to y_0$ стремятся к нулю.

Таким образом, окончательно

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = I(y_0),$$

что и доказывает теорему.

Теорема 6. *Если, сверх сказанного, функция $f(x, y)$ допускает в прямоугольнике $[a, b; c, d]$ непрерывную производную $f'_y(x, y)$, а также существуют и производные $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$, то интеграл* (11) *имеет производную по параметру, которая выражается формулой*

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y)\,dx + \beta'(y)\cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y)\cdot f(\alpha(y), y). \qquad (13)$$

И здесь мы будем исходить из равенства (12). Первый интеграл при $y = y_0$ имеет производную, представляемую интегралом от производной

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x, y_0)\,dx$$

— по теореме 3. Для второго интеграла (значение которого при $y = y_0$ есть нуль) имеем, по теореме о среднем:

$$\frac{1}{y - y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0}\cdot f(\bar{x}, y),$$

где $\bar{x}$ содержится между $\beta(y_0)$ и $\beta(y)$. Отсюда производная второго интеграла при $y = y_0$, которая совпадает с пределом предшествующего выражения при $y \to y_0$, будет

$$\beta'(y_0)\cdot f(\beta(y_0), y_0).$$

Аналогично, для производной третьего интеграла при $y = y_0$ получим

$$-\alpha'(y_0)\cdot f(\alpha(y_0), y_0).$$

Объединяя все эти результаты, убедимся в том, что производная $I'(y_0)$ существует и дается указанной формулой.

Замечание. Заключения обеих теорем сохраняют свою силу и в предположении, что функция $f(x, y)$ задана (и обладает указанными свойствами) лишь в области, содержащейся между кривыми

$$x = \alpha(y) \text{ и } x = \beta(y).$$

Возможность рассматривать функцию и вне этой области использована была для упрощения рассуждений.

Поучительно взглянуть на установленные результаты и с такой точки зрения: интеграл $I(y)$ получается из интеграла

$$I(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)\,dx,$$

зависящего от трех параметров y, u, v, подстановкой $u = \alpha(y)$, $v = \beta(y)$. Вопрос исчерпывается применением общих теорем о непрерывности и о дифференцировании сложной функции. В частности, формула (13) написана по классической схеме:

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u}\cdot\alpha'(y) + \frac{\partial I}{\partial v}\cdot\beta'(y).$$

300. Примеры. 1) Вычислить интеграл

$$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \qquad (0<a\leqslant b).$$

Представив подинтегральное выражение, в свою очередь, в виде интеграла

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\,dy$$

и переставив — по теореме 4 — в повторном интеграле

$$I=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy$$

интегрирования по x и по y, сразу получаем результат

$$I=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx=\int_a^b \frac{dy}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

2) Этому вычислению можно придать и другую форму, если рассматривать интеграл I — при фиксированном a — как функцию от переменного параметра b $(b\geqslant a)$. По теореме 3:

$$\frac{dI}{db}=\int_0^1 x^b\,dx=\frac{1}{b+1}.$$

Следовательно,

$$I=\ln(b+1)+C.$$

Но при $b=a$ интеграл I, очевидно, обращается в 0, так что $C=-\ln(a+1)$. Подставляя, придем к тому же результату, что и выше.

3) В рассмотренных случаях выполнение условий теоремы 3 или 4 было непосредственно ясно. При нарушении этих условий заключение теоремы может оказаться неверным. Приведем пример этого.

Пусть $f(x,y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ в прямоугольнике $[0,1;\ 0,1]$. Тогда

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx=\frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{1+y^2} \qquad (y>0),$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx=\operatorname{arctg} y\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

в то время как

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy=-\frac{\pi}{4}.$$

Отметим, что в точке (0, 0) функция $f(x,y)$ терпит разрыв.

§ 2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ

301. Определение равномерной сходимости интегралов. При распространении изложенной теории интегралов, зависящих от параметра, на случай несобственных интегралов особую роль играет понятие равномерной сходимости интегралов, которое мы предварительно и выясним.

Предположим, что функция $f(x, y)$ задана для всех значений $x \geqslant a$ и всех значений y в некоторой области $\mathcal{Y}$. Пусть, далее, при каждом y в этой области существует интеграл

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx. \tag{1}$$

По самому определению несобственного интеграла с бесконечным пределом [n°282]:

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x, y)\,dx.$$

Таким образом, интеграл

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

представляющий собой функцию от A и y, при $y = \text{const}$ и $A \to \infty$ имеет пределом $I(y)$. *Если стремление этого интеграла к $I(y)$ происходит равномерно относительно y в области $\mathcal{Y}$, то интеграл $I(y)$ называют равномерно сходящимся относительно y для указанных значений параметра.*

Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое не зависящее от y число $A_0 \geqslant a$, что, лишь только $A > A_0$, неравенство

$$\left|\int_a^\infty f(x, y)\,dx - \int_a^A f(x, y)\,dx\right| = \left|\int_A^\infty f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

будет выполняться одновременно для всех значений y в $\mathcal{Y}$.

Если сопоставить интеграл (1), зависящий от параметра y, с бесконечным функциональным рядом

$$\sum_{n=1}^\infty u_n(x),$$

где роль параметра играет x, и вспомнить сказанное в n° **284** об аналогии между несобственными интегралами и бесконечными рядами, то станет ясным полный параллелизм между данным выше определением и определением равномерной сходимости ряда в n° **264**.

Заметим, что именно Зайдель и Стокс, которые первыми противопоставили равномерную и неравномерную сходимость функционального ряда [n° 281], одновременно указали на подобные же возможности и для интеграла $\int\limits_a^\infty$, содержащего параметр.

Для примера рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^\infty ye^{-xy}\,dx,$$

который сходится при каждом фиксированном значении $y \geqslant 0$.

Вычислим непосредственно интеграл

$$\int\limits_A^\infty ye^{-xy}\,dx.$$

При $y=0$ он равен 0, каково бы ни было A; если же $y>0$, то с помощью подстановки $xy=t$ легко находим

$$\int\limits_A^\infty ye^{-xy}\,dx=\int\limits_{Ay}^\infty e^{-t}\,dt=e^{-Ay}.$$

Когда y *фиксировано*, это выражение при $A\to\infty$, очевидно, стремится к 0, и, каково бы ни было $\varepsilon>0$, неравенство

$$e^{-Ay}<\varepsilon \tag{3}$$

будет выполняться для всех $A>A_0(y)$, где

$$A_0(y)=\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{y}$$

зависит от y.

Если изменение y ограничено промежутком $[c,\,\partial]$, где $c>0$, то найдется и *не зависящее от* y число A_0, такое, что при $A>A_0$ неравенство (3) будет выполняться *сразу для всех* y: достаточно за A_0 принять $A_0(c)$, ибо при $A>A_0$ будет тогда

$$e^{-Ay}\leqslant e^{-Ac}<\varepsilon \qquad (c\leqslant y\leqslant\partial).$$

Иными словами, наш интеграл *сходится равномерно* относительно y в промежутке $[c,\,\partial]$.

Иначе обстоит дело, если параметр y изменяется в промежутке $[0,\,\partial]$ $(\partial>0)$. На этот раз такого A_0 уже не существует (по

крайней мере, если $\varepsilon < 1$). Это видно хотя бы из того, что, сколь большим ни взять A, выражение e^{-Ay} стремится к 1 при $y \to 0$, так что для достаточно малых значений y оно будет больше любого числа $\varepsilon < 1$. Сходимость интеграла при изменении y в промежутке $[0, \delta]$ уже не будет равномерной относительно y.

302. Условие и достаточные признаки равномерной сходимости. Пользуясь общим критерием равномерного стремления функции к пределу [n° 295, 1°], можно применительно к рассматриваемому случаю сформулировать его так:

Для того чтобы интеграл (1) *сходился равномерно относительно y в области $\mathcal{Y}$, необходимо и достаточно, чтобы при любом заданном $\varepsilon > 0$ нашлось такое число A_0, не зависящее от y, чтобы неравенство*

$$\left|\int_a^{A'} f(x, y)\,dx - \int_a^{A} f(x, y)\,dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon$$

выполнялось одновременно для всех y из $\mathcal{Y}$, лишь только $A' > A > A_0$.

Установим теперь некоторые признаки, по которым обыкновенно на практике судят о равномерной сходимости интегралов.

1°. Мы будем предполагать функцию $f(x, y)$ непрерывной по x для $x \geqslant a$. *Если существует такая, зависящая лишь от x, функция $\varphi(x)$, интегрируемая в бесконечном промежутке $[a, \infty]$, что при всех значениях y в $\mathcal{Y}$*

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x) \qquad (\text{для } x \geqslant a),$$

то интеграл (1) *сходится равномерно относительно y (в указанной области его значений).*

Это непосредственно вытекает из неравенства

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \int_A^{A'} |f(x, y)|\,dx \leqslant \int_A^{A'} \varphi(x)\,dx,$$

если воспользоваться только что доказанным критерием.

При указанных условиях иногда говорят, что функция $f(x, y)$ имеет интегрируемую мажоранту $\varphi(x)$, или что интеграл (1) мажорируется сходящимся интегралом

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx,$$

не содержащим параметра.

Легко усмотреть сходство этого признака с известным признаком равномерной сходимости функционального ряда, принадлежащим Вейерштрассу [n° 265].

Пример. 1) Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx \qquad (k \neq 0)$$

сходится равномерно относительно параметра a (в любой области его изменения), ибо мажорируется сходящимся интегралом

$$\int_0^\infty \frac{dx}{k^2+x^2},$$

не содержащим a.

2°. Рассмотрим интегралы

$$\int_a^\infty f(x, y)\cdot g(x)\,dx \quad \text{(4а)}, \qquad \int_a^\infty f(x)\cdot g(x, y)\,dx \quad \text{(4б)}$$

от произведения двух функций, из которых лишь в одну входит параметр y, изменяющийся в некоторой области $\mathcal{Y}$, и сформулируем для них более тонкие признаки равномерной сходимости, которые скопируем с признаков n° 287.

Функции f и g (в случае надобности — при $y=\text{const}$) мы, как и там, считаем непрерывными функциями от x, а g, сверх того, монотонной и имеющей непрерывную производную по x. Тогда

(I) *интеграл* (4а) *сходится равномерно относительно y в $\mathcal{Y}$, если*

1) *интеграл*

$$\Phi(A, y) = \int_a^A f(x, y)\,dx$$

представляется равномерно ограниченным при всех A и всех y:

$$|\Phi(A, y)| \leqslant K \qquad (K=\text{const})$$

и 2) $g(x)\to 0$ *при* $x\to\infty$;

точно так же

(II) *интеграл* (4б) *сходится равномерно относительно y, если*

1′) *интеграл*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

сходится, а

2′) *функция $g(x, y)$ равномерно ограничена для всех x и всех y:*

$$|g(x, y)| \leqslant L \qquad (L=\text{const}).$$

Что касается доказательства, то оно, по существу, остается прежним, так как — ввиду независимости постоянных K и L от y — и оценка интеграла

$$\int_A^{A'} f\cdot g\,dx$$

получается независимо от y, чем и обеспечивается равномерная сходимость.

Примеры. 2) Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{k^2 + x^2} dx$$

сходится равномерно относительно a, для $a \geqslant a_0 > 0$ — по признаку (I). Действительно, положив $f(x, a) = \sin ax$, имеем

$$\left| \int_0^A \sin ax \, dx \right| = \frac{1 - \cos aA}{a} \leqslant \frac{2}{a_0} = K;$$

с другой стороны, функция

$$g(x) = \frac{x}{k^2 + x^2},$$

монотонно убывая (по крайней мере, для достаточно больших x), стремится к 0 при $x \to \infty$.

3) Интеграл

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится равномерно относительно a, для $a \geqslant 0$ — по признаку (II). Здесь $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ интегрируема от 0 до ∞, а монотонно убывающая (в широком смысле!) функция $g(x, a) = e^{-ax}$ ограничена единицей.

303. Случай интегралов с конечными пределами. Рассмотрим теперь функцию $f(x, y)$, определенную для значений x в конечном промежутке $[a, b]$ и значений y в некоторой области $\mathcal{Y}$; пусть при $y = \text{const}$ она интегрируема по x (в собственном смысле или нет) от a до b. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx, \tag{5}$$

будь он собственный или нет, является пределом при $\eta \to 0$ интеграла

$$\varphi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y) \, dx. \tag{6}$$

Если стремление этого интеграла при $\eta \to 0$ к пределу $I(y)$ происходит равномерно относительно y для значений y в области $\mathcal{Y}$, то говорят, что интеграл (5) *сходится равномерно относительно y в указанной области.*

Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое не зависящее от y число $\delta > 0$, что, лишь только $\eta \leqslant \delta$, неравенство

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y)\, dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon$$

будет выполняться одновременно для всех значений y из $\mathcal{Y}$.

Нетрудно сформулировать здесь условие, необходимое и достаточное для равномерной сходимости, равно как и перенести на рассматриваемый случай достаточные признаки n° **302**. Предоставляем это читателю.

Мы рассматривали интеграл (5) от a до b как предел интеграла (6) от a до $b - \eta$ и нас интересовал характер приближения последнего интеграла к своему пределу. Таким образом, особую роль здесь играет точка $x = b$ (как в n° **301** — точка $x = \infty$). Может понадобиться (в зависимости от обстоятельств, которые выяснятся дальше) отвести подобную же роль и другой точке промежутка. Например, тот же интеграл (5) можно рассматривать как предел при $\eta \to 0$ интеграла

$$\psi(\eta, y) = \int_{a+\eta}^b f(x, y)\, dx.$$

Если последний при $\eta \to 0$ приближается к своему пределу равномерно относительно y, то также говорят о равномерной сходимости интеграла (5). Все сказанное выше переносится и на этот случай.

Если может возникнуть сомнение относительно того, о каком случае равномерной сходимости идет речь, говорят, что *интеграл сходится равномерно* (относительно y в определенной области), соответственно, *при* $x = \infty$, *при* $x = b$, *при* $x = a$ и т. п.

Отметим, что, как правило, равномерная сходимость интеграла (5), скажем, при $x = b$, нас будет интересовать в тех случаях, когда именно точка $x = b$ оказывается особой для интеграла (5) в смысле n° 288 — при тех или иных значениях y. Но определение не только формально сохраняет силу и тогда, когда интеграл (5) при всех значениях оказывается собственным, но, как увидим, может оказаться реально полезным также и в этом случае.

Например, интеграл

$$\int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2}\, dx$$

для каждого значения y в промежутке $[0, \partial]$, где $\partial > 0$, будет существовать как собственный. Однако для указанного промежутка изменения y его сходимость не будет равномерной при $x=0$. Действительно, неравенству

$$\int_0^\eta \frac{y}{x^2+y^2} = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{y} < \varepsilon,$$

если только $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, нельзя удовлетворить одновременно для всех значений $y > 0$: сколь малым ни взять η, его левая часть при $y \to 0$ стремится к $\frac{\pi}{2}$ и, для достаточно малых значений y, будет наверно больше, чем ε.

§ 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ

304. Предельный переход под знаком интеграла. Мы займемся теперь изучением интеграла с бесконечным пределом

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

который зависит от параметра y (изменяющегося в области $\mathcal{Y}$), и докажем для него ряд теорем, сходных с теоремами n° **296—298**, установленными для интегралов в собственном смысле. Переход от одних к другим будет осуществляться по тому же плану, которому мы следовали в n° **266—270** при перенесении свойств конечной суммы функций на случай суммы бесконечного функционального ряда. Подобно тому как там решающую роль играла равномерная сходимость функционального ряда, здесь такую же роль будет играть равномерная сходимость интеграла вида (1). Таким образом, руководящей идеей для нас снова будет та аналогия между бесконечными рядами и несобственными интегралами, которую мы не раз подчеркивали [n° **284, 301**].

Начнем мы с вопроса о предельном переходе под знаком интеграла, распространенного на бесконечный промежуток.

Теорема 1 n° **296** на этот случай не распространяется: если даже во всем бесконечном промежутке функция $f(x, y)$ при $y \to y_0$ р а в н о м е р н о стремится к предельной функции $\varphi(x)$, предельный переход под знаком интеграла может оказаться недопустимым.

Рассмотрим, в виде примера, функцию ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} & (x > 0) \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

Обычными методами дифференциального исчисления легко установить, что наибольшего значения эта функция достигает при $x=\sqrt{\frac{n}{3}}$, и равно оно $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}}e^{-\frac{3}{2}}$. Так как при $n\to\infty$ это значение стремится к нулю, то отсюда ясно, что функция $f_n(x)$ при $n\to\infty$ во всем промежутке $[0, \infty)$ равномерно стремится к $\varphi(x)=0$. Тем не менее интеграл

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx=1$$

при $n\to\infty$ вовсе не стремится к нулю.

Условия, достаточные для допустимости предельного перехода, даются следующей теоремой:

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$, определенная для $x\geqslant a$ и для y из $\mathcal{Y}$: 1) непрерывна по x и 2) при $y\to y_0$ стремится к предельной функции $\varphi(x)$ — равномерно относительно x в каждом конечном промежутке $[a, A]$. Если, сверх того, 3) интеграл (1) сходится равномерно относительно y в области $\mathcal{Y}$, то*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x, y)\,dx=\int_a^\infty \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Отметим, прежде всего, что функция $\varphi(x)$ будет также непрерывной [n° 295, 2°]. По условию равномерной сходимости [n° 302] для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $A_0>a$, что

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon$$

для всех y из $\mathcal{Y}$ одновременно, лишь только $A'>A>A_0$. Переходя здесь к пределу при $y\to y_0$ под знаком интеграла [n° 296, теорема 1], получим

$$\left|\int_A^{A'} \varphi(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

откуда следует [n° 286], что функция $\varphi(x)$ интегрируема в бесконечном промежутке $[0, \infty]$.

Далеее, при любом $A>a$, имеем:

$$\left|\int_a^\infty f(x, y)\,dx-\int_a^\infty \varphi(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_a^A f(x, y)\,dx-\int_a^A \varphi(x)\,dx\right|+$$
$$+\left|\int_A^\infty f(x, y)\,dx\right|+\left|\int_A^\infty \varphi(x)\,dx\right|.$$

Если взять по произволу число $\varepsilon > 0$, то можно сначала фиксировать A так, чтобы второе и третье слагаемое справа стали $< \frac{\varepsilon}{3}$ (независимо от y!), а затем настолько приблизить y к y_0, чтобы сделать и первое слагаемое $< \frac{\varepsilon}{3}$ [n° **296**] Тогда, для указанных y, будет

$$\left| \int_a^\infty f(x, y)\, dx - \int_a^\infty \varphi(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

что и приводит к (2).

Отсюда, применяя обобщенную теорему Дини [n° **295**, 3°], можно получить такое

Следствие. *Пусть неотрицательная функция $f(x, y)$ непрерывна по x для $x \geqslant a$ и стремится, возрастая с возрастанием y, к предельной функции $\varphi(x)$, также непрерывной в указанном промежутке. Тогда из существования интеграла*

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx \tag{3}$$

уже вытекает как существование интеграла (1) (при всех y из $\mathcal{Y}$), *так и наличие формулы* (2).

По упомянутой теореме при указанных условиях стремление функции $f(x, y)$ к $\varphi(x)$ будет равномерным относительно x в любом конечном промежутке. Далее, в силу теоремы 1 n° **285** существует интеграл (1), так как

$$f(x, y) \leqslant \varphi(x).$$

Функция $\varphi(x)$ играет одновременно и роль мажоранты [n° **302**], обеспечивающей равномерную (относительно y) сходимость интеграла (1). Таким образом, соблюдены все условия для применения предыдущей теоремы.

С предельным переходом под знаком интеграла чаще всего приходится иметь дело применительно к последовательности функций $\{f_n(x)\}$. Переходя от последовательностей к бесконечным рядам, можно получить, таким образом, новые теоремы о почленном интегрировании функциональных рядов.

Вот, например, какую форму получает следствие:

Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^\infty u_n(x),$$

состоящий из положительных и непрерывных для $x \geqslant a$ функций, имеет для этих значений x непрерывную же сумму $\varphi(x)$. Если последняя в промежутке $[a, +\infty]$ интегрируема, то в этом промежутке ряд можно интегрировать почленно.

Наконец, простым следствием из теоремы (1) является и теорема о непрерывности интеграла (1) по параметру.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна (как функция двух переменных) для значений $x \geqslant a$ и значений y в промежутке $[c, d]$. Если интеграл (1) сходится равномерно относительно y в промежутке $[c, d]$, то он представляет собою непрерывную функцию от параметра y в этом промежутке.*

Действительно, как мы видели в n° **296**, при изменении x в любом конечном промежутке $[a, A]$ функция $f(x, y)$ при $y \to y_0$ (где y_0 — любое частное значение y) равномерно относительно x стремится к предельной функции $f(x, y_0)$. А тогда, по теореме 1, в интеграле (1) можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty f(x, y_0)\,dx = I(y_0),$$

что и доказывает наше утверждение.

Просто доказывается и аналог теоремы Дини [n° **267**]:

Теорема 3. *Если непрерывная функция $f(x, y)$ неотрицательна, то из непрерывности интеграла (1) как функции от параметра, вытекает равномерная его сходимость.*

В этом случае непрерывная [по теореме 2 n° **296**] функция от y

$$\int_a^A f(x, y)\,dx$$

при возрастании A — возрастает и, следовательно [по обобщенной теореме Дини, n° **295**, 3°], стремится к своему пределу (1) равномерно относительно y, что и требовалось доказать.

305. Интегрирование интеграла по параметру. Сначала докажем следующую теорему:

Теорема 4. *При предположениях теоремы 2 имеет место формула:*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (4)$$

Действительно, при любом $A > a$

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\,dx + \int_c^d dy \int_A^\infty f(x, y)\,dx;$$

но — по теореме 4 n° 298 —

$$\int_c^d dy \int_a^A f\,dx = \int_a^A dx \int_c^d f\,dy,$$

так что разность

$$\int_c^d I(y)\,dy - \int_a^A dx \int_c^d f\,dy$$

напишется в виде

$$\int_c^d I(y)\,dy - \int_c^d dy \int_a^A f\,dx = \int_c^d dy \int_A^\infty f\,dx.$$

Если теперь — при произвольно малом $\varepsilon > 0$ — взять A настолько большим, чтобы было

$$\left| \int_A^\infty f\,dx \right| < \varepsilon$$

при всех y, то упомянутая разность будет (абсолютно) меньше $\varepsilon(d - c)$. В таком случае

$$\int_c^d I(y)\,dy = \lim_{A \to \infty} \int_a^A dx \int_c^d f\,dy,$$

что равносильно (4).

Если воспользоваться теоремой 3 [n° 304], то легко вывести отсюда такое

Следствие. В случае неотрицательной функции $f(x, y)$ *одна непрерывность интеграла* (1) *по* y *влечет за собой формулу* (4).

Таким образом, мы — при известных условиях — установили право переставлять два интеграла, из которых один распространен на бесконечный промежуток, а другой — на конечный.

Между тем во многих случаях как раз приходится переставлять интегралы, взятые оба в бесконечных промежутках, по формуле

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy. \tag{5}$$

Оправдать такую перестановку часто представляется делом сложным и кропотливым.

Лишь для узкого класса случаев удается обосновать формулу (5) общими соображениями; например:

Теорема 5. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна для $x \geqslant a$ и $y \geqslant c$ и притом неотрицательна. Предположим, далее, что оба интеграла

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx, \quad \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

являются непрерывными функциями, первый — от y, а второй — от x. Тогда, если существует один из двух повторных интегралов

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx, \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy, \tag{6}$$

то другой также существует, и имеет место равенство (5).

Допустим, что существует второй из интегралов (6). По предыдущему следствию, для любого конечного $C > c$ будем иметь

$$\int_c^C dy \int_a^\infty f\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^C f\,dy. \tag{7}$$

Подинтегральная функция

$$\int_c^C f\,dy$$

интеграла справа, как функция от x и C, непрерывна по x [теорема 2 n° 296] и — с возрастанием C до бесконечности — возрастая, стремится к функции

$$\int_c^\infty f\,dy,$$

по предположению непрерывной и интегрируемой по x от a до ∞. Применив к интегралу в правой части (7) следствие n° 296, можем в этом интеграле перейти к пределу при $C \to \infty$ под знаком интеграла. В таком случае не только существует и предел интеграла в левой части (7), т. е. первый из интегралов (6), но и оба повторных интеграла оказываются равными.

306. Дифференцирование интеграла по параметру. Относящуюся сюда теорему мы выведем из теоремы 4 предыдущего номера, наподобие того, как в n° 270 мы доказали теорему 5, опираясь на теорему 4 n° 269.

Теорема 6. Пусть функция $f(x, y)$, определенная и непрерывная по x для $x \geqslant a$ и y в $[c, d]$, имеет для указанных значений и непрерывную по обеим переменным производную $f'_y(x, y)$.

Предположим, далее, что интеграл (1) *сходится для всех* y *в* $[c, d]$, *а интеграл*

$$\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx \tag{8}$$

не только существует, но сходится равномерно относительно y *в том же промежутке. Тогда при любом* y *из* $[c, d]$ *имеет место формула*

$$I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx.$$

Применив к функции $f'_y(x, y)$ теорему 4, лишь заменив d на любое y $(c \leqslant y \leqslant d)$, будем иметь

$$\int_c^y dy \int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^y f'_y(x, y)\,dy =$$
$$= \int_a^\infty f(x, y)\,dx - \int_a^\infty f(x, c)\,dx.$$

Так как подинтегральная функция интеграла слева, т. е. интеграл

$$\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx,$$

есть непрерывная функция от y [по теореме 2 n° **304**], то интеграл слева будет именно её иметь своей производной по y [n° **183**, 12°]. Следовательно, ту же производную будет иметь и интеграл (1) в последней части равенства, разнящийся от интеграла слева лишь на постоянную. Теорема доказана.

307. Замечание об интегралах с конечными пределами. Мы подробно рассмотрели вопрос о свойствах интеграла

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx, \tag{1}$$

для которого единственным особым значением x была ∞. Подобная же теория может быть развита и для случаев, когда особое значение x будет конечным, например, совпадет с верхним пределом b интеграла

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{9}$$

Во всех доказанных утверждениях можно роль ∞ отвести числу b, заменив повсюду равномерную сходимость при $x=\infty$ равномерной же сходимостью при $x=b$ [n° **303**]. Вот, например, как перефразируется теорема 1:

Теорема 1*. *Пусть функция* $f(x, y)$, *определенная для* $a \leqslant x < b$ *и для* y *из* $\mathcal{Y}$: 1) *непрерывна по* x *и* 2) *при* $y \to y_0$ *стремится к предельной функции* $\varphi(x)$ — *равномерно относительно* x *в каждом промежутке* $[a, b-\eta]$. *Если, сверх того,* 3) *интеграл* (9) *сходится равномерно относительно* y *в области* $\mathcal{Y}$, *то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Конечно, может случиться, что налицо два особых значения x, скажем, $x=a$ и $x=\infty$ в том же интеграле (1). Можно перенести все утверждения и на этот случай; часто, однако, представляется удобным попросту представить интеграл (1) в виде суммы двух

$$\int_a^\infty = \int_a^b + \int_b^\infty \quad (a < b < \infty)$$

и применить изложенную теорию к каждому из слагаемых в отдельности.

308. Вычисление некоторых несобственных интегралов. Теория интегралов, зависящих от параметра, с пользой прилагается к вычислению многих классических несобственных интегралов.

1° Поставим себе задачей вычисление интеграла (Эйлер)

$$E = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx.$$

Прежде всего, установим, для каких значений параметра a этот интеграл вообще имеет смысл. Особые значения: $x=\infty$, $x=0$ (при $a \geqslant 1$ последняя точка не будет особой). Разобьем интеграл на два:

$$E = E_1 + E_2 = \int_0^1 + \int_1^\infty;$$

первый существует при $a > 0$, ибо тогда — если $a < 1$ — подинтегральная функция при $x \to 0$ будет бесконечно большой порядка $1-a < 1$, по сравнению с $\frac{1}{x}$ [n° **290**], а второй — при $a < 1$: тогда подинтегральная функция при $x \to \infty$ будет бесконечно малой

порядка $2-a>1$, по сравнению с $\frac{1}{x}$ [n° 285]. Итак, рассматриваемый интеграл сходится, если $0<a<1$; в этом предположении и займемся его вычислением.

Для $0<x<1$ имеем разложение в ряд

$$\frac{x^{a-1}}{1+x}=\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}x^{a+\mu-1},$$

который сходится равномерно, лишь если $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon'<1$. Но частичная сумма имеет интегрируемую в $[0, 1]$ мажоранту

$$0\leqslant\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^{\mu}x^{a+\mu-1}=\frac{x^{a-1}[1-(-x)^n]}{1+x}<x^{a-1},$$

следовательно, интеграл от нее сходится равномерно как при $x=0$, так и при $x=1$. Интегрируя почленно по (модифицированной) теореме 1, получим:

$$E_1=\sum_{\mu=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^{\mu}x^{a+\mu-1}\,dx=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu}}{a+\mu}.$$

Интеграл E_2 подстановкой $x=\frac{1}{z}$ приводим к виду

$$E_2=\int_0^1\frac{x^{-a}}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}\,dx.$$

Применяя уже полученное выше разложение, найдем:

$$E_2=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu}}{a-\mu}.$$

Таким образом,

$$E=\frac{1}{a}+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{a+\mu}+\frac{1}{a-\mu}\right).$$

Мы уже встречали «разложение на простые дроби» функции $\frac{1}{\sin t}$ [в n° 293, 3°; см. ниже n° 406, 3), замечание]:

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right).$$

Полагая здесь $t=\pi a$, приходим к окончательному результату:

$$E=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin \pi a} \qquad (0<a<1).$$

2°. Для вычисления интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

[ср. n° 293, 3°] введем в рассмотрение более общий интеграл, содержащий параметр:

$$I(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (a\geqslant 0),$$

из которого предложенный интеграл получается при $a=0$. Мы уже знаем, что интеграл $I(a)$ сходится равномерно относительно a, для $a\geqslant 0$ [n° 302, 3)], и, следовательно — по теореме 2 n° **304** — представляет непрерывную функцию от параметра a для указанных его значений. В частности,

$$I(0)=\lim_{a\to 0} I(a). \qquad (10)$$

Найдем теперь производную $I'(a)$ при $a>0$. Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$I'(a)=-\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx=-\frac{1}{1+a^2}$$

[n° 283, 5)]. Последний интеграл сходится равномерно для $a\geqslant a_0$ (где a_0 — любое фиксированное число, большее нуля), ибо мажорируется сходящимся интегралом $\int_0^\infty e^{-a_0x}\,dx$ [n° 302, 1°]; поэтому, по крайней мере, для упомянутых значений a, применение теоремы 6 n° **306** оправдано. Но, какое бы ни взять $a>0$, всегда можно выбрать $a_0>0$ так, чтобы было $a>a_0$. Значит, полученный результат верен для любого $a>0$. В таком случае, для $a>0$, имеем

$$I(a)=C-\operatorname{arctg} a.$$

Для определения постоянной C устремим a к ∞; так как

$$|I(a)|\leqslant\int_0^\infty e^{-ax}\,dx=\frac{1}{a},$$

то при этом $I(a)\to 0$, и C оказывается равной $\frac{\pi}{2}$. Окончательно, ввиду (10),

$$I(0)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

3°. Чтобы наново вычислить интеграл

$$K=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

[ср. n° **293**, 2°], положим в нем $x=ut$, где u — любое положительное число; мы получим

$$K=u\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

Умножим теперь обе части этого равенства на $e^{-u^2}\,du$ и проинтегрируем по u от 0 до ∞:

$$K\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=K^2=\int_0^\infty e^{-u^2}u\,du\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\,dt.$$

Нетрудно видеть, что перестановка интегралов ведет здесь весьма быстро к результату. В самом деле, после перестановки получим

$$K^2=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}\cdot u\,du=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4},$$

откуда (так как, очевидно, $K>0$)

$$K=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для оправдания произведенной перестановки интегралов попробуем прибегнуть к теореме 5 n° **305**. Но в то время как интеграл

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

есть непрерывная функция от t для всех $t\geqslant 0$, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)u^2}u\,dt=e^{-u^2}\cdot K$$

лишь для $u>0$, а при $u=0$ обращается в 0, терпя в этой точке разрыв. Поэтому применить теорему 5 непосредственно к прямоугольнику $[0, \infty; 0, \infty]$ нельзя! Мы ее применим к прямоугольнику $[u_0, \infty; 0, \infty]$, где $u_0>0$, пользуясь тем, что интеграл

$$\int_{u_0}^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} e^{-(1+t^2)u_0}$$

является непрерывной функцией от t для всех $t \geqslant 0$. Этим оправдывается равенство

$$\int_{u_0}^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-u^2(1+t^2)} u\,dt = \int_0^{\infty} dt \int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2(1+t^2)} u\,du.$$

Остается лишь, уменьшая u_0, перейти здесь к пределу при $u_0 \to 0$, что в правой части можно выполнить под знаком интеграла — на основании следствия n° **304**.

4°. Наконец, обратимся к так называемым интегралам Лапласа*):

$$y = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx \quad \text{и} \quad z = \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{k^2+x^2}\,dx.$$

Прежде всего отметим равномерную сходимость относительно параметра a, следовательно (по теореме 2), и непрерывность по a — первого из этих интегралов, y, и притом для всех значений $a \geqslant 0$ (см. n° **302**, 1)]. Ограничиваясь значениями $a>0$, с помощью дифференцирования по a под знаком интеграла (теорема 6) установим, что

$$\frac{dy}{da} = -z; \tag{11}$$

здесь мы опираемся на равномерную сходимость второго из интегралов, z, для всех $a \geqslant a_0$, где a_0 — любое фиксированное положительное число [см. n° **302**, 2)].

Дальнейшее дифференцирование по a производить под знаком интеграла невозможно, ибо в результате такого дифференцирования получился бы уже расходящийся интеграл.

Однако, если к написанному равенству почленно прибавить равенство (см. выше 2°)

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx\ **),$$

*) Пьер Симон Лаплас (1749—1827)—выдающийся французский астроном, математик и физик.

**) Впрочем для дальнейшего нам вовсе не нужно значение этого интеграла; достаточно лишь знать, что при всех $a>0$ он сохраняет постоянное значение, а в этом легко убедиться простой подстановкой $t=ax$.

то получим:

$$\frac{dy}{da}+\frac{\pi}{2}=k^2\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(k^2+x^2)}\,dx.$$

Здесь дифференцировать под знаком интеграла снова можно, и таким путем мы найдем

$$\frac{d^2y}{da^2}=k^2\int_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx,$$

так что

$$\frac{d^2y}{da^2}=k^2y.$$

Для этого простого линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, по корням $\pm k$ «характеристического уравнения», легко составить общее решение

$$y=C_1e^{ka}+C_2e^{-ka}, \tag{12}$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Но при всех значениях a величина y ограничена:

$$|y|\leqslant\int_0^\infty \frac{dx}{k^2+x^2}=\frac{\pi}{2k},$$

значит, необходимо $C_1=0$ (ибо иначе, при $a\to\infty$, и величина y безгранично возрастала бы). Для определения же постоянной C_2 положим $a=0$, так как, ввиду непрерывности y, соотношение (12) сохраняет силу и при этом значении a; очевидно:

$$C_2=\frac{\pi}{2k}.$$

Окончательно,

$$y=\int_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2k}\,e^{-ka}\qquad (a\geqslant 0).$$

Отсюда дифференцированием [см. (11)] определяется и z:

$$z=\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-ka}\qquad (a>0).$$

§ 4. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

309. Эйлеров интеграл первого рода. Так называется (по предложению Лежандра) интеграл вида

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \tag{1}$$

где $a, b > 0$. Он представляет функцию от двух переменных параметров a и b: *функцию* B («Бета»).

Рассматриваемый интеграл, как мы знаем [n° **290**, 3)], для положительных значений a и b (хотя бы и меньших единицы) сходится *) и, следовательно, действительно может быть положен в основу определения функции B. Установим некоторые ее свойства.

1°. Прежде всего, почти непосредственно (подстановкой $x = 1 - t$) получаем:

$$\mathrm{B}(a, b) = \mathrm{B}(b, a),$$

так что функция B является с и м м е т р и ч н о й относительно a и b.

2°. С помощью интегрирования по частям из формулы (1), при $b > 1$, находим **):

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 (1-x)^{b-1}\,d\,\frac{x^a}{a} =$$

$$= \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\Bigg|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\,dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\,dx - \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a, b-1) - \frac{b-1}{a}\mathrm{B}(a, b),$$

откуда

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1}\mathrm{B}(a, b-1). \tag{2}$$

Эту формулу можно применять с целью уменьшения b, пока b остается больше 1; таким образом всегда можно достигнуть того, чтобы второй аргумент стал $\leqslant 1$.

---

*) Наоборот, если значение хоть одного из параметров a, b будет $\leqslant 0$, то интеграл расходится.

**) Мы используем при этом тождество

$$x^a(1-x)^{b-2} = x^{a-1}(1-x)^{b-2} - x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Впрочем, того же можно добиться и в отношении первого аргумента, так как — ввиду симметричности B — имеет место и другая формула приведения:

$$B(a,\ b)=\frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,\ b)\quad (a>1). \tag{2'}$$

Если b равно натуральному числу n, то, последовательно применяя формулу (2), найдем:

$$B(a,\ n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}B(a,\ 1).$$

Но

$$B(a,\ 1)=\int\limits_0^1 x^{a-1}\,dx=\frac{1}{a}.$$

Поэтому для $B(a,\ n)$ и — одновременно — для $B(n,\ a)$ получается окончательное выражение

$$B(n,\ a)=B(a,\ n)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ \ldots\ \cdot(a+n-1)}. \tag{3}$$

Если и a равно натуральному числу m, то

$$B(m,\ n)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Эту формулу можно применять и при $m=1$ или $n=1$, если под символом $0!$ разуметь 1.

3°. Дадим для функции B другое аналитическое представление, которое часто бывает полезно. Именно, если в интеграле (1) произвести подстановку $x=\frac{y}{1+y}$, где y — новая переменная, изменяющаяся от 0 до ∞, то и получим

$$B(a,\ b)=\int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b-1}}\,dy. \tag{4}$$

Полагая здесь $b=1-a$ (в предположении, что $0<a<1$), найдем

$$B(a,\ 1-a)=\int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy.$$

Читатель узнает уже вычисленный выше интеграл, также связываемый с именем Эйлера [n° **308**, 1°]. Подставляя его значение, приходим к формуле

$$B(a,\ 1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}\qquad (0<a<1). \tag{5}$$

Если, в частности, взять

$$a = 1 - a = \frac{1}{2},$$

то получим:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Мы ограничимся этими немногими свойствами функции «Бета» потому, что — как увидим ниже [n° 311, 4°] — она очень просто выражается через другую функцию — «Гамма», на которой мы остановимся подробнее.

310. Эйлеров интеграл второго рода. Это название было присвоено Лежандром замечательному интегралу:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx, \tag{6}$$

который сходится при любом $a > 0$ [n° 290, 4)] *) и определяет *функцию* Γ («Гамма»). Функция Γ, после элементарных, является одной из важнейших функций для анализа и его приложений. Изучение свойств функции Γ, исходя из ее интегрального определения (6), послужит одновременно и прекрасным примером применения изложенной выше теории интегралов, зависящих от параметра.

Если положить в (6)

$$x = \ln\frac{1}{z},$$

то найдем:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1} dz.$$

Как известно [n° 65, 2)],

$$\ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right),$$

причем выражение $n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)$ при возрастании n стремится к своему пределу в о з р а с т а я **). В таком случае, на основании n° 304 (следствие) и 307

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1} dz$$

*) При $a \leqslant 0$ интеграл раходится.

**) В этом можно убедиться методами дифференциального исчисления, рассматривая выражение $\frac{1 - z^{\alpha}}{\alpha}$ как функцию от α.

или — если прибегнуть к подстановке $z=y^n$:

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}\,dy.$$

Но, согласно (3),

$$\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}\,dy=\mathrm{B}(n,\,a)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}.$$

Таким образом, окончательно, приходим к знаменитой формуле Эйлера — Гаусса:

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^a\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}.$$

Эту формулу Эйлер еще в 1729 г. сообщил в письме к Гольдбаху, но она была забыта. Гаусс впоследствии именно ее положил в основу самого определения функции $\Pi(a)=\Gamma(a+1)$. Много занимались функцией Γ Лежандр и Лобачевский, причем Лобачевский исходил из своеобразного определения функции Γ, использующего бесконечные ряды.

311. Простейшие свойства функции Г. 1°. *Функция* $\Gamma(a)$, *при всех значениях* $a>0$, *непрерывна и имеет непрерывные же производные всех порядков.* Достаточно доказать лишь существование производных. Дифференцируя интеграл (6) под знаком интеграла, получим

$$\Gamma'(a)=\int_0^\infty x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}\,dx. \tag{7}$$

Применение правила Лейбница оправдано тем, что оба интеграла

$$\int_0^1 x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}\,dx \quad\text{и}\quad \int_1^\infty x^{a-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}\,dx$$

сходятся равномерно относительно a: первый при $x=0$ для $a\geqslant a_0>0$ (мажоранта $x^{a_0-1}\,|\ln x|$), а второй при $x=\infty$ для $a\leqslant A<\infty$ (мажоранта $x^A\,e^{-x}$ *)).

Таким же путем можно убедиться и в существовании второй производной

$$\Gamma''(a)=\int_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^2\,e^{-x}\,dx \tag{7*}$$

и всех дальнейших.

---

*) Для $x>0$, очевидно, $\ln x<x$.

2°. Из (6), интегрированием по частям, сразу получаем:

$$a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = x^a e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx,$$

т. е.

$$\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a). \tag{8}$$

Эта формула, повторно примененная, дает

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdot\ldots\cdot(a+1)\cdot a\,\Gamma(a). \tag{8*}$$

Таким путем вычисление Γ для произвольного значения аргумента a может быть приведено к вычислению Γ для $0<a\leqslant 1$ (или, если угодно, для $1<a\leqslant 2$).

Если в (8*) взять $a=1$ и принять во внимание, что

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1, \tag{9}$$

то окажется, что

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{10}$$

Функция Γ *является,* таким образом, *естественным распространением на область* *л ю б ы х* *положительных значений аргумента — функции* $n!$, *определенной лишь для натуральных значений* n.

3°. Ход изменения функции Γ. Теперь мы можем составить себе общее представление о поведении функции $\Gamma(a)$ при возрастании a от 0 до ∞.

Из (9) и (10) имеем: $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, так что, по теореме Ролля, между 1 и 2 должен лежать корень a_0 производной $\Gamma'(a)$. Эта производная постоянно возрастает, ибо вторая производная $\Gamma''(a)$, как видно из ее выражения (7*), всегда положительна. Следовательно, при $0<a<a_0$ производная $\Gamma'(a)<0$, и функция $\Gamma(a)$ убывает, а при $a_0<a<\infty$ будет $\Gamma'(a)>0$, так что $\Gamma(a)$ возрастает; при $a=a_0$ налицо минимум. Вычисление, которого мы не приводим, дает:

$$a_0 = 1{,}4616\ldots,\quad \min\Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0{,}8856\ldots$$

Интересно установить еще предел для $\Gamma(a)$ при приближении a к 0 или к ∞. Из (8) (и из 1°) ясно, что

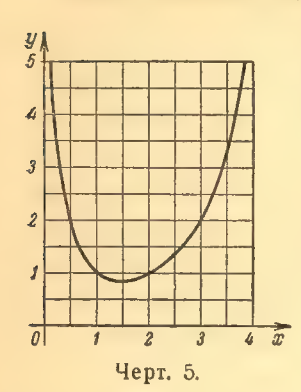
$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \to +\infty$$

при $a\to+0$. С другой стороны, ввиду (10),

$$\Gamma(a) > n!,\ \text{лишь только}\ a > n+1,$$

т. е. $\Gamma(a)\to+\infty$ и при $a\to+\infty$.

График функции $\Gamma(a)$ представлен на черт. 5.



Черт. 5.

4°. Связь между функциями B и Г. Для того чтобы установить эту связь, мы подстановкой $x=ty\,(t>0)$ преобразуем (6) к виду:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int_0^\infty y^{a-1}\,e^{-ty}\,dt. \tag{11}$$

Заменяя здесь a на $a+b$ и одновременно t на $1+t$, получим:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^\infty y^{a+b-1}\,e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Умножим теперь обе части этого равенства на t^{a-1} и проинтегрируем по t от 0 до ∞:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt=\int_0^\infty t^{a-1}\,dt\int_0^\infty y^{a+b-1}\,e^{-(1+t)y}\,dy.$$

В интеграле слева мы узнаем функцию $\mathrm{B}(a,\ b)$ [см. (4)]; справа же переставим интегралы. В результате получим [с учетом (7) и (6)]:

$$\Gamma(a+b)\cdot\mathrm{B}(a,\ b)=\int_0^\infty y^{a+b-1}\,e^{-y}\,dy\int_0^\infty t^{a-1}\,e^{-ty}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty y^{a+b-1}\,e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}\,dy=\Gamma(a)\int_0^\infty y^{b-1}\,e^{-y}\,dy=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

откуда, наконец,

$$\mathrm{B}(a,\ b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{12}$$

Приведенный изящный вывод этого соотношения Эйлера принадлежит Дирихле. Впрочем, для обоснования его надлежит еще оправдать перестановку интегралов.

Мы сделаем это, ограничиваясь поначалу предположением что $a>1$, $b>1$. Тогда для функции

$$t^{a-1}\,y^{a+b-1}\,e^{-(1+t)y}$$

оказываются выполненными все условия теоремы 5 n° 305: эта функция непрерывна (и притом положительна) для $y \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$, а интегралы

$$t^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1}\, e^{-(1+t)y}\, dy = \Gamma(a+b)\, \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

и

$$y^{a+b-1}\, e^{-y} \int_0^\infty t^{a-1}\, e^{-ty}\, dt = \Gamma(a)\, y^{b-1}\, e^{-y}$$

в свою очередь представляют собою непрерывные функции: первый — от t для $t \geqslant 0$, второй — от y для $y \geqslant 0$. Ссылка на теорему оправдывает перестановку интегралов, а с нею и формулу (12) — для случая $a > 1$, $b > 1$.

Если же известно лишь, что $a > 0$ и $b > 0$, то — по доказанному — имеем

$$\mathrm{B}(a+1,\ b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

А отсюда, используя формулы приведения (2), (2′) для функции B и (8) для функции Г, легко вновь получить формулу (12), уже без ненужных ограничений.

5°. Формула дополнения. Если в формуле (12) положить $b = 1 - a$ (считая $0 < a < 1$), то, ввиду (5) и (9), получим соотношение

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \tag{13}$$

которое и называется формулой дополнения.

При $a = \frac{1}{2}$ отсюда находим (так как $\Gamma(a) > 0$):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{14}$$

Выполнив в интеграле

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\, dz = \sqrt{\pi}$$

подстановку $z = x^2$, мы вновь получим уже известный нам интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6°. Формула Лежандра. Если в интеграле

$$\mathrm{B}(a,\ a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx=$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx$$

сделать подстановку

$$\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t},$$

то получим

$$\mathrm{B}(a,\ a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}\,dt=\frac{1}{2^{2a-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ a\right).$$

Заменим в обоих случаях функцию B ее выражением (12) через Γ:

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

Сокращая на $\Gamma(a)$ и подставляя вместо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ его значение $\sqrt{\pi}$ [см. (14)], придем к формуле Лежандра:

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

Существует еще много других формул, выявляющих глубокие свойства функции Γ. Мы не имеем возможности останавливаться здесь на них, равно как и на способах приближенного вычисления значений самой функции Γ и ее логарифма. Ограничимся упоминанием о том, что еще Лежандр, используя свойства функции Γ и аппарат бесконечных рядов, составил таблицу десятичных логарифмов $\Gamma(a)$ для a от 1 до 2 через 0,001, сначала с 7, а затем с 12 десятичными знаками.

Новая, уже не элементарная, функция Γ является в такой же мере освоенной нами, как и привычные нам функции, которые мы назвали элементарными.

312. Примеры. Приведем теперь несколько простых примеров использования функции Г.

1) Интеграл

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx \qquad (p,\ q,\ m>0)$$

подстановкой $x^m = y$ сразу сводится к эйлерову интегралу первого рода:

$$\frac{1}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{m},\ q\right) = \frac{1}{m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

2) Вычислим интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi\,d\varphi \qquad (a,\ b>0).$$

Если положить $x=\sin\varphi$, то он приведется к интегралу

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1}\,dx.$$

Используя предыдущий пример, будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

В частности, при $b=1$, получим отсюда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Легко проверить, что этой одной формулой охватываются и о б е формулы (5) n° 187.

Если же в исходном интеграле взять $a=1+c,\ b=1-c$, где $|c|<1$, то найдем (применяя формулу дополнения)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^c\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}.$$

3) Рассмотрим, наконец, еще интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{\frac{p}{q}} x}{x}\,dx,$$

где p и q — взаимно простые нечетные натуральные числа.

Переписав интеграл в виде

$$\int_0^\infty \sin^{\frac{p-q}{q}} x \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

применим к нему общую формулу Лобачевского, упомянутую на стр. 135. Условия:

$$f(x+\pi)=f(x) \quad \text{и} \quad f(\pi-x)=f(x),$$

при которых эта формула верна, для функции

$$f(x)=\sin^{\frac{p-q}{q}} x$$

выполнены. Таким образом получим [см. 2]

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{\frac{p}{q}} x}{x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{p}{q}-1} x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2q}\right)}.$$

Из этих немногих примеров читателю становится ясным, насколько — благодаря введению функции Γ — расширяются возможности представления интегралов в конечном виде через известные функции. Иной раз, даже если функция Γ и не входит в конечный результат, получение его облегчается использованием свойств этой функции.

313. Исторические замечания о перестановке двух предельных операций. Целью этого заключительного номера является сопоставление — в историческом освещении — всего сказанного в разных местах курса по поводу *перестановки двух предельных операций*. Под «предельной операцией» мы разумеем здесь не только непосредственно предельный переход по какому-либо из аргументов рассматриваемой функции, но и другие операции, в конечном счете приводящиеся к такому предельному переходу, как-то: суммирование бесконечного ряда, дифференцирование функции и, наконец, интегрирование функции между постоянными пределами (в собственном или несобственном смысле).

В n° 131 была речь о равенстве двух повторных пределов

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y). \tag{15}$$

Мы видели, что подобное равенство имеет место не всегда, и установили некоторые условия, обеспечивающие его справедливость. Аналогичным было

положение вещей и в n° 147 по отношению к равенству двух смешанных производных

$$D_y D_x f(x, y) = D_x D_y f(x, y). \qquad (16)$$

Глава XVI («Функциональные последовательности и ряды») главным образом была посвящена именно вопросам рассматриваемого типа: там изучались условия, при которых оказывалась дозволительной перестановка операции суммирования бесконечного ряда — с обычным предельным переходом [n° 266, 268], дифференцированием [n° 270] и интегрированием [n° 269]. Наконец, то же можно сказать и об основном содержании настоящей главы; только на этот раз одной из переставляемых операций неизменно являлась операция интегрирования, которую мы — при соблюдении известных условий — так же последовательно переставляли с другими предельными операциями [n° 296—298, 304—307].

Еще задолго до того, как те операции, о которых здесь идет речь, были осознаны как «предельные» (а этот процесс завершился, как известно, лишь к началу XIX века), перестановка двух таких операций прочно вошла в математическую практику. Она фактически осуществляется даже основоположниками анализа: вспомним почленное дифференцирование и интегрирование рядов у Ньютона, Лейбница и их современников, а также «правило Лейбница» для дифференцирования интеграла по параметру. С такой перестановкой мы непрерывно встречаемся и на всем протяжении XVIII века, чаще — без обоснования, а иной раз и с доказательствами, разумеется, на уровне строгости того времени; для примера упомянем рассуждения Эйлера и Клеро, обосновывающие перестановку двух дифференцирований (1739 г.). Можно сказать, что в истории математического анализа перестановка двух предельных операций всегда служила могущественным средством для получения многих общих утверждений и отдельных математических фактов. Но — неправильно примененная, она же являлась источником ошибок и парадоксов. Самая мысль о том, что перестановка двух предельных операций не всегда дозволительна, созревала медленно — именно на основе анализа ошибок, и сделалась общим достоянием около середины XIX века. Строгое же обоснование привычных в анализе случаев такой перестановки было завершено примерно лишь к концу века.

По отношению к простейшему вопросу о перестановке двух предельных переходов ясность была достигнута, естественно, раньше всего. На рубеже XVIII и XIX веков на простых примерах уже было отмечено, что равенство (15) может не иметь место, т. е. что повторный предел иной раз оказывается зависящим от того порядка, в котором производятся предельные переходы. В одной заметке Коши от 1815 г. (опубликованной в 1827 г.) мы находим последовательное и правильное изложение этого вопроса.

Точно так же как Коши, так и Гауссу было известно, что порядок интегрирований в повторном интеграле, если подинтегральная функция терпит разрыв (например обращается в бесконечность), не может быть безоговорочно изменен. Но отсюда было еще далеко до ясности в отношении перестановки двух предельных операций вообще.

Нам уже приходилось упоминать [n° 281] неудачные попытки Коши даже доказать утверждения о непрерывности суммы ряда непрерывных функций и о почленном интегрировании такого ряда, из которых первое сразу же было опровергнуто Абелем, а второе впоследствии вызвало возражения Чебышёва. К сказанному мы здесь добавим еще, что в 1823 г. Коши дал столь же неверное доказательство безоговорочной применимости «правила Лейбница», относящегося к дифференцированию интеграла по параметру; и это — несмотря на то, что тогда уже были известны примеры неприложимости упомянутого правила! Отметим, что в 1828 г. Остроградский уже ясно понимал, что — в случае обращения подинтегральной функции в бесконеч-

ность — дифференцирование под знаком интеграла может оказаться недопустимым. Позже на это обстоятельство указывали и другие авторы.

В учебных руководствах по анализу бесконечно малых еще вплоть до сороковых годов нередко попадались неверные утверждения, относящиеся к рассматриваемым здесь вопросам. Наряду с этим умножались и примеры, подчеркивавшие необходимость осторожности в этих вопросах. Мы приведем из них лишь один наиболее ранний, указанный еще Фурье:

$$\int_0^\infty \frac{\sin at}{t}\, dt$$

[n° 293, замечание]. Очевидно, что

$$\lim_{a \to \pm 0} \int_0^\infty \frac{\sin at}{t}\, dt \neq \int_0^\infty \lim_{a \to \pm 0} \frac{\sin at}{t}\, dt = 0,$$

с другой же стороны, дифференцирование этого интеграла по параметру a, выполненное под знаком интеграла, приводит к результату

$$\int_0^\infty \cos at\, dt,$$

лишенному смысла при всех значениях a! [n° 283, 6)]

Стала отчетливо ощущаться необходимость уточнения условий, при которых перестановка предельных операций — того или другого типа — оказывается допустимой. Этому уточнению способствовало введение в конце сороковых годов понятия равномерной сходимости ряда [n° 281] и родственного ему понятия равномерной сходимости интеграла [n° 301]. Однако самый процесс внесения надлежащей строгости в изложение того круга вопросов, которыми мы здесь занимаемся, потребовал еще нескольких десятилетий. Так, например, первое строгое обоснование формулы (16) мы находим у Шварца лишь в 1873 г. Еще в 1892 г. Бельгийская академия присудила де ла Валле Пуссену *) премию за сочинение, где даны условия дифференцирования и интегрирования под знаком интеграла, распространенного на бесконечный промежуток, и т. д.

---

*) Шарль Жан де ла Валле Пуссен (род. в 1866 г.) — современный бельгийский математик.

ГЛАВА ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ*)

§ 1. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

314. Понятие неявной функции от одной переменной. Предположим, что значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением, которое (если все члены его перенести налево) в общем случае имеет вид

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Здесь $F(x, y)$ есть функция двух переменных, заданная в какой-либо области. Если для каждого значения x — в некотором промежутке — существует одно или несколько значений y, которые совместно с x удовлетворяют уравнению (1), то этим определяется, однозначная или многозначная, функция $y = f(x)$, для которой равенство

$$F(x, f(x)) = 0 \tag{2}$$

имеет место уже *тождественно* относительно x.

Возьмем, например, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{1a}$$

оно, очевидно, определяет y как *двузначную* функцию от x в промежутке $[-a, a]$, именно

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

И, если вместо y подставить в уравнение (1a) эту функцию, то получится *тождество*.

Здесь удалось найти для y очень простое аналитическое выражение через x, даже в элементарных функциях, но так обстоит дело далеко не всегда.

---

*) Продолжение глав VIII и IX первого тома.

Функция $y=f(x)$ называется *неявной*, если она задана при посредстве неразрешенного (относительно y) уравнения (1); она становится *явной*, если рассматривается непосредственная зависимость y от x. Читателю ясно, что эти термины характеризуют лишь способ задания функции $y=f(x)$ и не имеют отношения к ее природе. Строго говоря, противопоставление неявного и явного задания функции с полной четкостью возможно лишь, если под явным заданием разуметь явное аналитическое задание; если же, в качестве явного, допускать задание с помощью любого правила [n° 17], то задание функции y от x с помощью уравнения (1) ничем не хуже всякого другого.

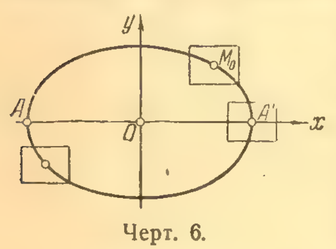
В простейшем случае, когда уравнение (1) — алгебраическое, т. е. когда функция $F(x, y)$ есть целый относительно x и y многочлен, определяемая им неявная функция y от x (вообще многозначная) называется алгебраической. Если степень уравнения (относительно y) не выше четырех, то алгебраическая функция допускает явное выражение в радикалах, при степени выше четырех такое выражение возможно только в виде исключения.

Сейчас нас будет интересовать лишь вопрос о существовании и однозначности «неявной» функции (равно как и о других ее свойствах), независимо от возможности представить ее в «явном» виде аналитической формулой. Впрочем, в этой постановке вопрос для нас не нов; с частным случаем его мы имели дело, когда речь шла о существовании и о свойствах обратной функции, и уравнением

$$y-f(x)=0$$

переменная x определялась как «неявная» функция от y.

Поучительна геометрическая трактовка указанного вопроса. Уравнение (1), при известных условиях, выражает кривую на плоскости [например, уравнение (1а), как известно, выражает эллипс (черт. 6)]; в этом случае оно называется *неявным уравнением* кривой. Вопрос заключается в том, может ли кривая (1) (или ее часть) быть выражена обычным уравнением вида $y=f(x)$, с однозначной функцией справа; геометрически это означает, что кривая (или ее часть) параллелью оси y пересекается лишь в одной точке.



Черт. 6.

Если мы желаем иметь однозначную функцию, то, как видно на примере того же эллипса, нужно ограничить не только область изменения x, но и область изменения y.

Мы будем говорить, для краткости, что *в прямоугольнике* $(a, b; c, d)$ *уравнение* (1) *определяет y как однозначную функцию от x, $y=f(x)$, если при каждом значении x в про-*

межутке (a, b) *уравнение* (1) *имеет один, и только один, корень* $y=f(x)$ *в промежутке* (c, d).

Очень важно твердо усвоить, что при указанных условиях *оба уравнения*

$$F(x, y)=0 \quad \textit{и} \quad y=f(x)$$

в прямоугольнике $(a, b; c, d)$ *совершенно равносильны*, т. е. удовлетворяются одними и теми же точками этого прямоугольника.

Обычно нас будет интересовать определенная точка $M_0(x_0, y_0)$, удовлетворяющая уравнению (1) (лежащая на кривой), и в роли упомянутого прямоугольника будет фигурировать окрестность этой точки. Так, например, в случае эллипса (черт. 6), очевидно можно утверждать, что уравнение (1а) определяет ординату y как однозначную функцию от абсциссы x в достаточно малой окрестности любой точки эллипса, кроме вершин его A, A' на большой оси.

315. Существование и свойства неявной функции. Теперь мы укажем простые и легко проверяемые условия, относящиеся к известной нам функции $F(x, y)$, которые обеспечивают не только существование однозначной неявной функции $y=f(x)$, но и наличие у последней свойств непрерывности и дифференцируемости.

Теорема 1. *Предположим, что:* 1) *функция* $F(x, y)$ *определена и непрерывна, вместе со своими частными производными* F'_x *и* F'_y, *в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$;

2) $F(x, y)$ *в этой точке обращается в нуль:* $F(x_0, y_0)=0$, *напротив,*

3) *производная* $F'_y(x, y)$ *в ней отлична от нуля:* $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. *Тогда:*

а) *в некоторой окрестности*

$$\mathscr{D}_0=(x_0-\delta,\ x_0+\delta;\ y_0-\delta',\ y_0+\delta')$$

точки $M_0(x_0, y_0)$ *уравнение* (1) *определяет* y *как однозначную функцию от* x: $y=f(x)$;

б) *при* $x=x_0$ *эта функция принимает значение* y_0: $f(x_0)=y_0$;

в) *в промежутке* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и*

г) *она имеет в этом промежутке непрерывную производную.*

Доказательство: а) Пусть, скажем, $F'_y(x_0, y_0)>0$. В силу предположенной в 1) непрерывности производной F'_y, эта производная будет положительна

$$F'_y(x, y)>0$$

и в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) *). Возьмем

---

*) Например, в такой, где выполняется неравенство

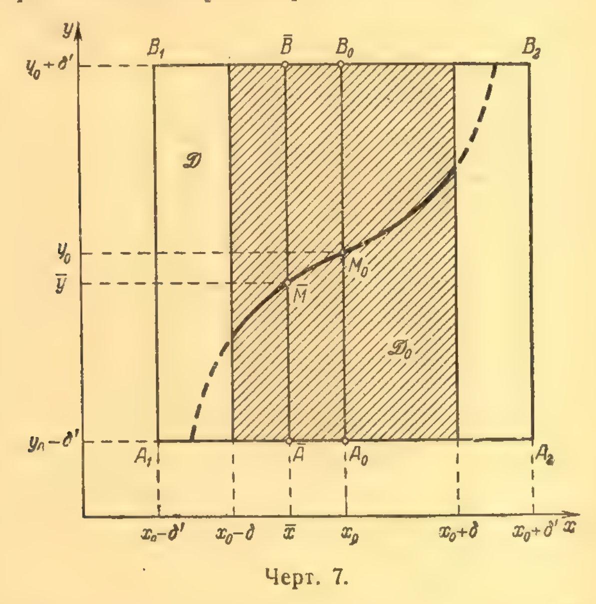
$$|F'_y(x, y)-F'_y(x_0, y_0)|<F'_y(x_0, y_0).$$

замкнутый прямоугольник

$$\mathcal{D}=[x_0-\delta',\ x_0+\delta';\ y_0-\delta',\ y_0+\delta'],$$

целиком лежащий в этой окрестности, так что написанное неравенство имеет место во всех его точках.

Отсюда сразу вытекает, что — при любом постоянном x из промежутка $[x_0-\delta',\ x_0+\delta']$ — $F(x, y)$ как функция от y будет монотонно возрастающей [n° 111].



Черт. 7.

Станем передвигаться вдоль вертикали, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ (черт. 7), т. е. фиксируем $x=x_0$; тогда рассматриваемая функция $F(x, y)$ сведется к функции $F(x_0, y)$ от одной переменной y. В силу 2), она при $y=y_0$ обращается в 0. В то же время, как мы сейчас установили, функция $F(x_0, y)$ возрастает вместе с y, так что для $y<y_0$ ее значения меньше нуля, а для $y>y_0$ — больше нуля. В частности, следовательно, она будет иметь значения разных знаков в точках $A_0(x_0, y_0-\delta')$ и $B_0(x_0, y_0+\delta')$, именно

$$F(A_0)=F(x_0,\ y_0-\delta')<0,\quad F(B_0)=F(x_0,\ y_0+\delta')>0.$$

Перейдем теперь к горизонтальным прямым, проходящим через эти точки A_0 и B_0, т. е. фиксируем на этот раз $y=y_0-\delta'$ или $y=y_0+\delta'$. Получатся две функции от одной переменной x: $F(x,\ y_0-\delta')$ и $F(x,\ y_0+\delta')$, которые при $x=x_0$ имеют: первая —

отрицательное значение, а вторая — положительное. Но по условию 1) эти функции непрерывны *), а потому найдется некоторая окрестность $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ точки x_0 $(0<\delta\leqslant\delta')$, в которой обе функции сохраняют свой знак **), так что при $x_0-\delta<x<x_0+\delta$

$$F(x,\ y_0-\delta')<0,\quad F(x,\ y_0+\delta')>0.$$

Иными словами, на нижнем и верхнем основаниях A_1A_2 и B_1B_2 исходного прямоугольника вдоль отрезков длины 2δ с центрами в точках A_0 и B_0 заданная функция $F(x,\ y)$ имеет отрицательные значения на первом и положительные — на втором.

Фиксируем в промежутке $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ любое значение $x=\bar{x}$ и рассмотрим вертикальный отрезок, соединяющий точки $\bar{A}(\bar{x},\ y_0-\delta')$ и $\bar{B}(\bar{x},\ y_0+\delta')$. Вдоль него наша функция снова сведется к функции $F(\bar{x},\ y)$ от одной переменной y. Так как она непрерывна *) и, как сказано, на концах промежутка $[y_0-\delta',\ y_0+\delta']$ имеет значения разных знаков:

$$F(\bar{A})=F(\bar{x},\ y_0-\delta')<0,\quad F(\bar{B})=F(\bar{x},\ y_0+\delta')>0,$$

то, по теореме Больцано—Коши [n° 68], при некотором значении $y=\bar{y}$, содержащемся между $y_0-\delta'$ и $y_0+\delta'$, эта функция $F(\bar{x},\ y)$ обращается в нуль:

$$F(\bar{x},\ \bar{y})=0.$$

И здесь из монотонности функции $F(\bar{x},\ y)$ следует, что при $y\gtrless\bar{y}$ будем иметь, соответственно, $F(\bar{x},\ y)\gtrless 0$, так что $\bar{y}$ есть единственное значение y в промежутке $(y_0-\delta',\ y_0+\delta')$, которое совместно с $x=\bar{x}$ удовлетворяет уравнению (1). *На каждом вертикальном отрезке $\bar{A}\bar{B}$ найдется только одна точка $\bar{M}(\bar{x},\ \bar{y})$, обращающая левую часть уравнения в нуль.*

Таким образом, в окрестности

$$\mathscr{D}_0=(x_0-\delta,\ x_0+\delta;\ y_0-\delta',\ y_0+\delta')$$

точки $M_0(x_0,y_0)$ уравнение (1), действительно, определяет y как однозначную функцию от x: $y=f(x)$.

б) В то же время предыдущее рассуждение, ввиду 2), показывает также, что $f(x_0)=y_0$. Именно из того, что $F(x_0,\ y_0)=0$, усматриваем, что y_0 и есть то единственное значение y в промежутке $(y_0-\delta',\ y_0+\delta')$, которое совместно с $x=x_0$ удовлетворяет уравнению (1).

---

*) Мы предположили непрерывность функции $F(x,\ y)$ по совокупности переменных $x,\ y$; но в таком случае она будет непрерывна и по каждой переменной в отдельности.

**) Это следует из n° 37, 2). Ср. сноску на стр. 181.

в) Переходя к доказательству утверждений в) и г), будем под y разуметь именно ту неявную функцию $y=f(x)$, которая определяется уравнением (1) и тождественно ему удовлетворяет. Придадим x приращение Δx; наращенному значению $x+\Delta x$ будет соответствовать значение $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$, вместе с ним удовлетворяющее уравнению (1): $F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=0$. Очевидно, и приращение

$$\Delta F(x,\ y)=F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,\ y)=0.$$

Преобразуем теперь это равенство, используя формулу конечных приращений [n° 102]:

$$\begin{aligned} 0&=F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,\ y)=\\ &=[F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,\ y+\Delta y)]+\\ &\qquad+[F(x,\ y+\Delta y)-F(x,\ y)]=\\ &=F'_x(x+\theta\,\Delta x,\ y+\Delta y)\cdot\Delta x+F'_y(x,\ y+\theta_1\,\Delta y)\cdot\Delta y\\ &\qquad(0<\theta,\ \theta_1<1), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta\,\Delta x,\ y+\Delta y)}{F'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y)}. \qquad (3)$$

Прежде всего установим, что при $\Delta x\to 0$ будет и $\Delta y\to 0$, т. е. что функция $y=f(x)$ непрерывна. Имеем

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|=\frac{|F'_x(x+\theta\,\Delta x,\ y+\Delta y)|}{F'_y(x,\ y+\theta_1\,\Delta y)}.$$

Но непрерывная в $\mathscr{D}$ функция $|F'_x|$ ограничена сверху конечным числом M [n° 137]

$$|F'_x|\leqslant M,$$

и в то же время положительная непрерывная функция F'_y, имеющая в $\mathscr{D}$ наименьшее значение m [n° 137], также положительное, ограничена им снизу:

$$F'_y\geqslant m>0.$$

Теперь легко получить оценку

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\leqslant\frac{M}{m}$$

или

$$|\Delta y|\leqslant\frac{M}{m}|\Delta x|,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

г) Возвращаясь к равенству (3), предположим теперь, что $\Delta x \to 0$. Так как мы уже знаем, что при этом и $\Delta y \to 0$, то, по непрерывности функций F'_x и F'_y и с учетом того, что $F'_y \neq 0$, справа в пределе получим

$$-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Таков же будет и предел левой части равенства (3), так что существует производная y по x:

$$f'(x) = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{4}$$

Подставляя сюда $f(x)$ вместо y, получим

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))};$$

поскольку в числителе и знаменателе имеем непрерывные функции от непрерывных же функций, и знаменатель не обращается в нуль, отсюда ясно, что $f'(x)$ — также непрерывная функция. Теорема доказана полностью.

Таким образом, по свойствам функции $F(x, y)$, которая нам дана непосредственно, мы можем судить о свойствах функции $y = f(x)$, для которой непосредственного задания мы не имеем!

Мы уже упоминали в n° **314** о геометрической трактовке изученного здесь вопроса. Если кривая задана «неявным» уравнением (1), и в какой-либо ее точке $F'_y \neq 0$, то в окрестности этой точки кривая может быть выражена «явным» уравнением вида: $y = f(x)$. Разумеется, x и y можно обменять ролями: если в некоторой точке $F'_x \neq 0$, то в ее окрестности кривую можно выразить «явным» же уравнением другого вида: $x = g(y)$. Лишь в «особой» точке [n° **210**], где одновременно и $F'_x = 0$ и $F'_y = 0$, наша теорема не находит приложения.

316. Неявная функция от нескольких переменных. Аналогично уравнению (1), можно рассматривать и уравнение с бо́льшим числом переменных. Пусть, например, имеем уравнение с *тремя* переменными:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{5}$$

При известных условиях этим уравнением z определяется как «неявная» функция от двух переменных x и y:

$$z = h(x, y)$$

которая, вообще говоря, будет многозначной. Если подставить ее вместо z, то будем иметь

$$F(x, y, h(x, y)) = 0 \tag{6}$$

уже *тождественно* относительно x, y.

Мы будем говорить, что *в параллелепипеде*

$$(a,\ b;\ c,\ д;\ e,\ f)$$

уравнение (5) *определяет* z *как однозначную функцию от* x *и* y: $z=h(x,\ y)$, *если для любой точки* $(x,\ y)$, *содержащейся в прямоугольнике*

$$(a,\ b;\ c,\ д)$$

уравнение (5) *имеет один, и только один, корень* $z=h(x,\ y)$ *в промежутке* $(e,\ f)$.

Если это имеет место, то *уравнения*

$$F(x,\ y,\ z)=0 \quad и \quad z=h(x,\ y)$$

в параллелепипеде $(a,\ b;\ c,\ д;\ e,\ f)$ *оказываются совершенно равносильными.*

В роли такого параллелепипеда обычно будет фигурировать окрестность интересующей нас точки $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Сформулируем теперь относящуюся к уравнению (5) теорему.

Теорема 2. *Предположим, что:*

1) *функция* $F(x,\ y,\ z)$ *определена и непрерывна, вместе со своими частными производными, в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$;

2) *функция* F *в точке* $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *обращается в нуль; и, наконец,*

3) *производная* F'_z *в этой точке не равна нулю.*

Тогда:

а) *в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$\mathscr{E}_0=(x_0-\Delta,\ x_0+\Delta;\ y_0-\Delta',\ y_0+\Delta';\ z_0-\Delta'',\ z_0+\Delta'')$$

уравнение (5) *определяет* z *как однозначную функцию от* x *и* y: $z=h(x,\ y)$;

б) *при* $x=x_0$, $y=y_0$ *эта функция принимает значение* z_0: $h(x_0,\ y_0)=z_0$;

в) *функция* $h(x,\ y)$ *непрерывна по совокупности своих аргументов и*

г) *она имеет непрерывные же частные производные* h'_x, h'_y.

На доказательстве мы останавливаться не будем, так как оно совершенно аналогично доказательству теоремы 1.

На этот раз геометрическим образом уравнения (5) является поверхность. При условии $F'_z\neq 0$ в окрестности соответствующей точки поверхность выражается и явным уравнением вида $z=h(x,\ y)$. Если в какой-либо точке одновременно $F'_x=F'_y=F'_z=0$, то теорема неприложима — точка «особая» [n° 213].

317. Определение неявных функций из системы уравнений. Наконец, в самом общем случае может быть дана система из m уравнений с $n+m$ переменными:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)=0,\\ &F_2(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &F_m(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь речь идет об определении этой системой m переменных $y_1, \ldots, y_m$ как «неявных» функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_1=f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m=f_m(x_1, \ldots, x_n),$$

так что при подстановке их в (5) получаются тождества относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Подробно мы рассмотрим простейший случай — систему из двух уравнений с тремя переменными:

$$\underbrace{F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0.}\tag{8}$$

Говорят, что в параллелепипеде

$$(a, b; c, d; e, f)$$

эта система определяет y и z как однозначные функции от x: $y=f(x)$, $z=g(x)$, если для каждого значения x в промежутке (a, b) система уравнений (8) *имеет одну, и только одну, систему решений $(y=f(x), z=h(x))$ из прямоугольника $(c, d; e, f)$.*

При этих условиях ясно, что снова *система* (8) *в пределах параллелепипеда равносильна системе*

$$\underbrace{y=f(x), \quad z=g(x).}$$

Мы видели, что в вопросе о существовании однозначной неявной функции, определяемой одним уравнением (1) [или (5)], решающую роль играло требование, чтобы в рассматриваемой точке, удовлетворяющей уравнению, не обращалась в нуль производная F'_y [соответственно, F'_z] именно по той переменной, которая подлежит определению как неявная функция. В вопросе же о существовании однозначных неявных функций y, z, определяемых системой уравнений (8), к которому мы сейчас переходим, аналогичную роль будет играть определитель, составленный из четырех частных производных от функций, стоящих в левых частях по подлежащим определению переменным y и z:

$$J=J(x, y, z)=\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Теорема 3. *Предположим, что:*

1) *функции* $F(x, y, z)$ *и* $G(x, y, z)$ *определены и непрерывны, вместе со всеми своими частными производными, в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0, y_0, z_0)$;

2) *точка* P_0 *удовлетворяет системе* (8):

$$F(x_0, y_0, z_0)=0, \quad G(x_0, y_0, z_0)=0;$$

3) *определитель* $J(x, y, z)$ *в этой точке отличен от нуля:* $J(x_0, y_0, z_0)\neq 0$.

Тогда:

а) *в некоторой окрестности*

$$\mathscr{M}=(x_0-\delta,\ x_0+\delta;\ y_0-\delta',\ y_0+\delta';\ z_0-\delta'',\ z_0+\delta'')$$

точки P_0 *система уравнений* (8) *определяет* y и z *как однозначные функции от* x: $y=f(x)$, $z=g(x)$;

б) *при* $x=x_0$ *эти функции принимают, соответственно, значения* y_0 и z_0: $f(x_0)=y_0$, $g(x_0)=z_0$;

в) *в промежутке* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны и*

г) *имеют непрерывные же производные* $f'(x)$, $g'(x)$.

Доказательство. Поскольку определитель J в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ отличен от нуля, во втором его столбце хоть один элемент также не равен нулю в этой точке; пусть, например,

$$F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0.$$

В таком случае, по теореме 2, в некоторой окрестности

$$\mathscr{E}_0=(x_0-\Delta,\ x_0+\Delta;\ y_0-\Delta',\ y_0+\Delta';\ z_0-\Delta'',\ z_0+\Delta'')$$

точки P_0 первое из уравнений (8) определяет z как однозначную функцию от x и y: $z=h(x, y)$, со свойствами, перечисленными в заключениях б), в) и г) этой теоремы. Заменяя в системе (8) первое уравнение равносильным ему (*в пределах* $\mathscr{E}_0$!) уравнением $z=h(x, y)$, получим равносильную систему

$$G(x, y, z)\underbrace{=0,\ z=}h(x, y).$$

Наконец, если в G подставить $h(x, y)$ на место z, то придем к более простой, но все еще равносильной системе

$$\Phi(x, y)\underbrace{=0,\ z=}h(x, y), \tag{10}$$

где для краткости мы положим

$$\Phi(x, y)\equiv G(x, y, h(x, y)). \tag{11}$$

Таким образом, мы свели задачу к доказательству того, что в некоторой (содержащейся в $\mathscr{E}_0$) окрестности $\mathscr{M}_0$ точки P_0 система

уравнений (10) определяет y и z как однозначные функции от x, обладающие всеми требуемыми свойствами. Воспользуемся же тем удобным для нас обстоятельством, что первое из уравнений (10) содержит только переменные x, y, и применим к нему уже доказанную теорему 1: если нам удастся установить, что этим уравнением y определяется как однозначная функция от x: $y=f(x)$, то и z уже без труда определится как однозначная функция от x по второму из уравнений (10):

$$z=h(x,\ f(x))=g(x). \tag{12}$$

Приступая к проверке выполнения условий теоремы 1 для функции Φ, отметим, прежде всего, что

$$h(x_0,\ y_0)=z_0 \tag{13}$$

[б) теоремы 2], и в силу непрерывности функции $h(x,\ y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ значение этой функции вблизи M_0 разнится от z_0 сколь угодно мало. Тогда в достаточно малой окрестности точки M_0 функция $\Phi(x,\ y)$ будет непрерывна, вместе со своими частными производными, потому что таковы функции $G(x,\ y,\ z)$ (вблизи P_0) и $h(x,\ y)$ (вблизи M_0), из которых она составлена [см. (11)].

Точно так же выполняется условие 2) теоремы 1:

$$\Phi(x_0,\ y_0)=G(x_0,\ y_0,\ h(x_0,\ y_0))=G(x_0,\ y_0,\ z_0)=0,$$

в силу (11), (13) и предположения 2) настоящей теоремы.

Остается проверить выполнение условия 3) теоремы 1. Дифференцируя (11) по y, найдем

$$\Phi'_y(x,\ y)=G'_y+G'_z\cdot h'_y. \tag{14}$$

Но h'_y может быть получено дифференцированием по y тождества (6):

$$F'_y+F'_z\cdot h'_y=0, \quad \text{откуда } h'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Подставляя это выражение в (14), придем к результату

$$\Phi'_y(x,\ y)=G'_y-G'_z\cdot\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{J}{F'_z},$$

причем справа вместо аргумента z везде должно быть подставлено $h(x,\ y)$. Точке $M_0(x_0,\ y_0)$ слева отвечает, ввиду (13), точка $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ справа. Так как, по условию 3), определитель J в точке P_0 отличен от нуля, то это справедливо и относительно производной Φ'_y в точке M_0.

Теперь мы уже вправе применить к уравнению $\Phi(x,\ y)=0$ теорему 1 и утверждать, что в некоторой окрестности точки M_0:

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta;\ y_0-\delta',\ y_0+\delta')$$

(где $0<\delta<\Delta$, $0<\delta'<\Delta'$) это уравнение, действительно, определяет y как однозначную функцию от x: $y=f(x)$, а тогда (как уже отмечалось) формула (12) определит и z как однозначную функцию от x.

За окрестность $\mathcal{M}_0$, о которой идет речь в а), можно взять параллелепипед

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta;\ y_0-\delta',\ y_0+\delta';\ z_0-\delta'',\ z_0+\delta''),$$

полагая $\delta''=\Delta''$. Заключения б), в) и г) теоремы оправдываются свойствами функций $f(x)$ и $h(x, y)$, которые сформулированы в теоремах 1 и 2.

И здесь теореме может быть дано геометрическое истолкование. Система (8), вообще говоря, выражает кривую в пространстве — пересечение двух поверхностей, представляемых каждым из уравнений порознь. Если в некоторой точке отличен от нуля какой-либо из определителей второго порядка матрицы частных производных:

$$\begin{pmatrix} F'_x, & F'_y, & F'_z \\ G'_x, & G'_y, & G'_z \end{pmatrix},$$

скажем, определитель (9), то в окрестности рассматриваемой точки две из координат (в данном случае: y и z) могут быть рассматриваемы как функции третьей (x), т. е. кривая может быть выражена «явными» уравнениями $y=f(x)$, $z=g(x)$. Мы не можем применить теорему лишь в «особой» точке, где все три определителя матрицы одновременно обращаются в нуль.

Аналогичная теорема может быть доказана и для системы уравнений (7) общего вида по методу математической индукции. При этом индукция проводится относительно числа уравнений, наподобие того, как мы только что свели случай двух уравнений к случаю одного уравнения. Не останавливаясь на формулировке и доказательстве общей теоремы, мы подчеркнем лишь, что в вопросе о существовании системы неявных функций $y_1, \ldots, y_m$, определяемых системой (7), решающую роль играет определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

— он должен быть отличен от нуля в той точке, об окрестности которой идет речь.

Замечание. Мы обращаем внимание читателя на локальный характер всех теорем существования неявных функций: речь идет

все время лишь о некоторой окрестности рассматриваемой точки. Но и в таком виде эти теоремы полезны; например, для изучения свойств геометрического образа в данной его точке совершенно достаточно ограничиться непосредственной ее окрестностью.

318. Вычисление производных неявных функций. Ход рассуждений, с помощью которых устанавливались теоремы существования неявных функций, не всегда давал представление о самом способе вычисления производных (первого порядка) от неявных функций. О производных высшего порядка и вовсе не было речи. Теперь на этих важных вопросах мы остановимся специально.

Начнем с простейшего случая, когда дано уравнение (1). Будем считать выполненными, в окрестности рассматриваемой точки, условия теоремы 1; существенную роль в дальнейшем будет играть требование $F'_y \neq 0$.

Так как существование самой неявной функции y от x и ее производной y'_x уже наперед известно, то процесс вычисления этой производной можно осуществить путем дифференцирования по x равенства (1)

$$F(x, y) = 0,$$

которое превращается в тождество, если под y разуметь как раз определяемую отсюда неявную функцию. Мы получим [как уже имели в п° 141,4)]

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_x = 0, \tag{15}$$

откуда возвращаемся к уже известной формуле (4)

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Теперь мы можем пойти дальше. Если функция $F(x, y)$ имеет непрерывные производные второго порядка, то выражение, стоящее в формуле (4) справа, может быть продифференцировано по x, следовательно, существует и производная от y'_x, т. е. вторая производная y''_{x^2} от неявной функции y. Выполняя дифференцирование и подставляя всякий раз вместо y'_x ее выражение (4), найдем:

$$y''_{x^2} = \frac{(F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'_x) \cdot F'_x - (F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'_x) \cdot F'_y}{F'^2_y} =$$

$$= \frac{2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} - F'^2_y \cdot F''_{x^2} - F'^2_x \cdot F''_{y^2}}{F'^3_y};$$

отсюда же видим, что вторая производная будет непрерывной функцией от x.

Если функция $F(x, y)$ имеет непрерывные производные третьего порядка, то, очевидно, существует и третья производная от неявной функции y'''_{x^3}; ее выражение снова может быть получено непосредственным дифференцированием выражения для y''_{x^2} и т. д. С помощью математической индукции легко доказать, что *существование непрерывных производных функции $F(x, y)$ до k-го порядка ($k > 1$) включительно обеспечивает и существование (непрерывной) производной k-го порядка от неявной функции.*

После того как, таким образом, самый факт существования последовательных производных от неявной функции установлен, вычисление их проще производить путем повторного дифференцирования тождества (15), с учетом

того, что y есть функция от x. Например, первое же дифференцирование этого тождества даст нам

$$F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y'_x + (F''_{xy} + F''_{y^2} \cdot y'_x) \cdot y'_x + F'_y \cdot y''_{x^2} = 0,$$

откуда (ведь $F'_y \neq 0$!)

$$y''_{x^2} = -\frac{F''_{x^2} + 2F''_{xy} \cdot y'_x + F''_{y^2} \cdot y'^2_x}{F'_y};$$

подставив вместо y'_x его выражение (4), вернемся к уже найденному выражению для y''_{x^2}; и т. д.

Пример. 1) Пусть y связано с x уравнением

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Дифференцируя последовательно по x (причем y считаем функцией от x), получим

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} \quad \text{или} \quad x + yy' = xy' - y;$$

затем

$$1 + y'^2 + yy'' = xy''; \ldots$$

Из первого уравнения находим

$$y' = \frac{x + y}{x - y},$$

из второго (если подставить найденное значение y')

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{x - y} = 2\frac{x^2 + y^2}{(x - y)^3}$$

и т. д.

Аналогично обстоит дело и в случае уравнения (5)

$$F(x, y, z) = 0.$$

Здесь предполагаем выполненными условия теоремы 2. Если под z разуметь неявную функцию, определяемую этим уравнением, то оно превратится в тождество, которое можно дифференцировать как по x, так и по y. В результате получим

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

(Второе равенство мы, собственно, уже получили этим же приемом в процессе доказательства теоремы 3.)

Если функция F имеет непрерывные производные второго, третьего, ... порядка, то такие же производные имеет и функция z: все это сходно со сказанным выше относительно уравнения (1).

Если нужны все производные первого, второго, ... порядка, то проще сразу вычислять dz, d^2z, ... Продифференцируем же наше тождество полным образом, т. е. приравняем нулю полный дифференциал от его левой части (используя при этом инвариантность формы первого дифференциала, n° 143):

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0,$$

так что

$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\,dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\,dy.$$

В то же время

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Ввиду произвольности dx и dy отсюда ясно *), что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

как мы и получили выше.

Дифференцируя еще раз, получим

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\,dz\right]dx + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z}\,d^2 z = 0$$

и определим $d^2 z$, что приведет нас к выражениям для

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

и т. д. Мы видим, что во всех этих выкладках основную роль играет условие, что

$$F'_z = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Пример. 2) Пусть неявная функция z от x, y определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Имеем последовательно

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0, \quad dz = -\frac{c^2 x}{a^2 z}\,dx - \frac{c^2 y}{b^2 z}\,dy,$$

так что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

Затем

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} + \frac{z\,d^2 z}{c^2} = 0,$$

откуда (если воспользоваться известным уже выражением для dz)

$$d^2 z = -\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2 b^2}\,dx\,dy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right],$$

*) Равенство $A\,dx + B\,dy = A'dx + B'dy$ при произвольных значениях dx и dy может иметь место лишь тогда, когда $A = A'$ и $B = B'$.

что дает нам

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4}{a^2 z^3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4}{b^2 z^3}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

и т. д.

Перейдем теперь к рассмотрению системы уравнений (8):

$$F(x, y, z) = 0; \quad G(x, y, z) = 0.$$

Будем предполагать, что в окрестности взятой точки выполняются условия теоремы 3. Снова обращаем внимание на роль, которую будет играть требование $J \neq 0$.

Мы знаем, что неявные функции y и z от x имеют производные по x. Самое вычисление их производится дифференцированием тождеств, которые получатся из (8), если под y и z разуметь именно упомянутые неявные функции. Дифференцирование по x, например, дает

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Это — система линейных уравнений относительно неизвестных $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ с отличным от нуля определителем J. Отсюда обе производные по x легко определяются; то же можно выполнить и для производных по y.

Мы не станем повторять здесь замечаний относительно использования дифференцирования полным образом, существования и вычисления производных высших порядков.

Наконец, все сказанное распространяется и на общий случай.

Пример. 3) Пусть дана система

$$x + y + z + u = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3,$$

определяющая y, z, u как функции от x. Имеем

$$1 + y' + z' + u' = 0, \quad x + yy' + zz' + uu' = 0,$$

$$x^2 + y^2 y' + z^2 z' + u^2 u' = 0.$$

Предполагая определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & u \\ y^2 & z^2 & u^2 \end{vmatrix} = (z - y)(u - y)(u - z)$$

неравным нулю, имеем отсюда

$$y' = -\frac{(z - x)(u - x)}{(z - y)(u - y)} \qquad \text{и т. д.}$$

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

319. Относительные экстремумы. Рассмотрим вопрос об экстремуме функции $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ от $n+m$ переменных в предположении, что эти переменные подчинены еще m «уравнениям связи»

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})=0.$$
$$(i=1, 2, \ldots, m)$$

Мы уточним понятие о таком относительном экстремуме и укажем приемы для его разыскания.

Говорят, что *в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$, удовлетворяющей уравнениям связи, функция $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ имеет относительный максимум (минимум), если неравенство*

$$f(x_1, \ldots, x_{n+m}) \leqslant f(x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$$
$$(\geqslant)$$

выполняется в некоторой окрестности точки M_0 для всех точек $(x_1, \ldots, x_{n+m})$, удовлетворяющих уравнениям связи.

Если, например, речь идет о функции $u=f(x, y, z)$ трех переменных x, y, z, подчиненных еще уравнению связи

$$F(x, y, z)=0,$$

то разыскание относительного экстремума функции u означает геометрически, что экстремум ищется на поверхности, выраженной написанным уравнением: и сама экстремальная точка и точки, которые с нею сопоставляются, должны лежать на этой поверхности. Если налицо два уравнения связи

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0,$$

то, очевидно, дело сводится к рассмотрению лишь точек на кривой, которая задается этими уравнениями.

Переходя к детальному изложению вопроса, мы для упрощения письма ограничимся функцией

$$u=f(x, y, z, t)$$

от четырех переменных, считая их подчиненными двум уравнениям связи:

$$F(x, y, z, t)=0, \quad G(x, y, z, t)=0. \tag{1}$$

Пусть функция f имеет относительный экстремум в точке $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Мы будем предполагать, что как функция f, так и функции F и G имеют в окрестности рассматриваемой точки непрерывные частные производные по всем аргументам. Пусть,

далее, в точке P_0 отличен от нуля хоть один из определителей второго порядка матрицы, составленных из частных производных*)

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z & F'_t \\ G'_x & G'_y & G'_z & G'_t \end{pmatrix},$$

например, определитель

$$J = \begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Тогда, если ограничиться надлежащей окрестностью точки P_0 (по теореме, аналогичной теореме 3 n° **317**), система (1) равносильна системе вида

$$z = \varphi(x, y), \quad t = \psi(x, y), \tag{3}$$

где φ, ψ суть неявные функции, определяемые системой (1). Иными словами, требование, чтобы значения переменных x, y, z, t удовлетворяли уравнениям связи (1), можно заменить предположением, что переменные z и t представляют собой функции (3) от x и y. Таким образом, вопрос об относительном экстремуме для функции $f(x, y, z, t)$ от четырех переменных в точке $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ сводится к вопросу об обыкновенном (абсолютном) экстремуме для сложной функции от двух переменных

$$f(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) \tag{4}$$

в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Эти соображения указывают и на реальный путь для нахождения точки, доставляющий относительный экстремум функции $f(x, y, z, t)$: если мы умеем фактически разрешить уравнения связи, например, относительно переменных z и t, и найти явные выражения для функций (3), то дело сводится к нахождению абсолютного экстремума для сложной функции (4). Собственно говоря, мы так именно и поступали в ряде ранее решенных задач [n° **153**, **154**], например, когда мы искали наибольшее значение для произведения $xyzt$ при условии $x + y + z + t = 4c$, и т. п.

Укажем теперь другой путь для нахождения точки $P_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$, не предполагая, что мы имеем явные выражения для (неявных) функций (3), хотя существованием этих функций мы будем пользоваться и здесь.

Итак, пусть в точке P_0 функция $f(x, y, z, t)$ имеет относительный экстремум или — что то же — сложная функция (4) в точке M_0 имеет экстремум абсолютный.

Тогда в этой точке обращаются в 0 обе производные, по x и по y, функции (4), а следовательно, и ее дифференциал. По

*) В этом случае говорят, что матрица имеет (в точке P_0) ранг 2.

инвариантности формы (первого) дифференциала [n° 143] это условие можно записать так:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0, \tag{5}$$

где под dz и dt разумеются дифференциалы функций (3) в точке M_0, в то время как частные производные вычислены в точке P_0, ибо

$$\varphi(x_0, y_0)=z_0, \ \psi(x_0, y_0)=t_0. \tag{6}$$

Из (5) *нельзя, конечно, заключить о равенстве нулю коэффициентов при дифференциалах, так как не все эти дифференциалы произвольны*. Для того чтобы свести дело к произвольно выбираемым дифференциалам, т. е. к дифференциалам dx и dy независимых переменных, мы постараемся исключить отсюда дифференциалы dz и dt переменных зависимых. Это легко сделать, если продифференцировать полным образом уравнения связи (1), разумея под z и t функции (3)*):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial t}dt=0,\\&\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial z}dz+\frac{\partial G}{\partial t}dt=0.\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь, как и выше, ввиду (6), частные производные вычислены в точке P_0. Так как, по предположению, определитель (2) в этой точке — не нуль, то dz и dt могут быть отсюда линейно выражены через dx и dy. Если эти выражения подставить в (5), то получится равенство вида

$$A\,dx+B\,dy=0,$$

где A и B означают выражения, рациональные относительно частных производных функций F, G, и здесь взятых в точке P_0. Так как в этом равенстве фигурируют только дифференциалы dx, dy независимых переменных, т. е. совершенно произвольные числа, то в точке M_0 имеем

$$A=0, \quad B=0.$$

Вместе с уравнениями связи это дает четыре уравнения для определения неизвестных x, y, z и t.

Конечно, мы установили лишь необходимые условия для экстремальной точки $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Но и в таком виде условия могут быть полезны даже для разыскания наибольшего (или наименьшего) значения функции f при условиях (1), если по характеру

---

*) Точнее говоря, мы дифференцируем те тождества, которые получаются из уравнений (1), если вместо z и t в них подставить неявные функции (3). Подобный способ речи мы будем применять и впредь.

вопроса наперед ясно, что внутри рассматриваемой области должна существовать точка, где это наибольшее (наименьшее) значение достигается, или если такое допущение сделано в порядке наведения, с тем, чтобы найденную точку апробировать другими соображениями.

Примеры приведены ниже, в n° 321.

320. Метод неопределенных множителей Лагранжа. В изложенном выше способе нарушается симметрия в отношении переменных: часть из них трактуется как независимые, часть — как зависимые, одни дифференциалы исключаются, другие сохраняются. Иногда это влечет за собой усложнение выкладок. Лагранж предложил метод, при котором все переменные сохраняют одинаковую роль.

Умножим равенства (7), соответственно, на произвольные пока («неопределенные») множители λ, μ и результаты почленно сложим с (5). Мы получим равенство

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}\right)dy+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}+\mu\frac{\partial G}{\partial z}\right)dz+\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda\frac{\partial F}{\partial t}+\mu\frac{\partial G}{\partial t}\right)dt=0, \tag{8}$$

где попрежнему dz и dt означают дифференциалы неявных функций (3) (в рассуждении мы пока сохраняем неравноправие переменных); производные вычислены в точке P_0.

Выберем теперь значения множителей λ и μ так, чтобы обращались в нуль именно коэффициенты при зависимых дифференциалах dz и dt:

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}+\mu\frac{\partial G}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial t}+\lambda\frac{\partial F}{\partial t}+\mu\frac{\partial G}{\partial t}=0. \tag{9}$$

Это сделать можно, поскольку определитель (2) системы линейных уравнений, получающейся для определения λ и μ, отличен от нуля. При выбранных значениях множителей равенство (8) примет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{dG}{\partial y}\right)dy=0. \tag{10}$$

Здесь мы снова имеем дело лишь с дифференциалами независимых переменных, поэтому коэффициенты при них должны быть нулями, т. е. наряду с (9) имеем и

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+\mu\frac{\partial G}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+\mu\frac{\partial G}{\partial y}=0. \tag{9*}$$

Итак, для определения четырех неизвестных x, y, z, t, да еще двух множителей λ и μ, имеем столько же уравнений, именно два уравнения связи и четыре уравнения (9*) и (9).

Для того чтобы облегчить выписывание этих уравнений, обыкновенно вводят вспомогательную функцию

$$\Phi=f+\lambda F+\mu G;$$

тогда упомянутые уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}=0. \qquad (11)$$

Они выглядят так же, как и условия обыкновенного экстремума для функции F. *Это следует рассматривать лишь как указание, облегчающее запоминание.*

И метод Лагранжа приводит к необходимым условиям. В остальном здесь может быть повторено то, что было сказано в конце предыдущего номера.

Замечание. В изложенной теории существенную роль играло предположение о ранге матрицы из частных производных, которым мы воспользовались трижды. При решении задач одним из указанных методов — для уверенности в том, что не пропущена ни одна точка, доставляющая функции относительный экстремум, — следовало бы предварительно установить, что упомянутое предположение выполняется на деле во всех точках рассматриваемой области, удовлетворяющих уравнениям связи. В простых случаях мы будем предоставлять это читателю.

Перейдем к примерам и задачам.

321. Примеры и задачи. 1) Пусть требуется найти экстремум функции $u=xyzt$ при условии $x+y+z+t=4c$; область изменения переменных определяется неравенствами $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $t\geqslant 0$. Мы уже решили эту задачу в n° 153, 2) фактически выражая t из последнего условия.

Применяя к той же задаче метод Лагранжа, введем вспомогательную функцию

$$\Phi=xyzt+\lambda(x+y+z+t)\ *)$$

и составим условия:

$$\Phi'_x=yzt+\lambda=0, \ \ldots, \ \Phi'_t=xyz+\lambda=0,$$

откуда

$$yzt=xzt=xyt=xyz, \quad \text{так что} \quad x=y=z=t=c.$$

2) Вернемся к задаче о наивыгоднейших сечениях проводов в электрической сети с параллельным включением [n° 154, 3)]. Сохраняя принятые там обозначения, будем искать экстремум функции

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n)=l_1q_1+l_2q_2+\ldots+l_nq_n$$

при условии, что

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_n)=\frac{\rho l_1J_1}{q_1}+\frac{\rho l_2J_2}{q_2}+\ldots+\frac{\rho l_nJ_n}{q_n}=e;$$

при этом мы не станем даже вводить, взамен $q_1, q_2, \ldots, q_n$, другие переменные, как сделали это выше, ибо нашими новыми методами задача и так решается просто.

---

*) Если вспомнить роль этой функции, то станет ясно, что постоянное слагаемое в составе Φ здесь может быть опущено без вреда.

Итак, дифференцируя полным образом уравнение $F=0$, получим затем следующее выражение для дифференциала dq_n:

$$dq_n = -\frac{q_n^2}{l_n J_n}\left\{\frac{l_1 J_1}{q_1^2}\,dq_1 + \ldots + \frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2}\,dq_{n-1}\right\}.$$

Подставляя его в равенство $df = l_1\,dq_1 + l_2\,dq_2 + \ldots + l_{n-1}\,dq_{n-1} + l_n\,dq_n = 0$, придем к результату:

$$\left(l_1 - \frac{q_n^2}{J_n}\cdot\frac{l_1 J_1}{q_1^2}\right)dq_1 + \ldots + \left(l_{n-1} - \frac{q_n^2}{J_n}\cdot\frac{l_{n-1} J_{n-1}}{q_{n-1}^2}\right)dq_{n-1} = 0.$$

Так как $dq_1, \ldots, dq_{n-1}$ уже произвольны, то коэффициенты при них порознь — нули, откуда

$$\frac{q_1^2}{J_1} = \frac{q_2^2}{J_2} = \ldots = \frac{q_{n-1}^2}{J_{n-1}} = \frac{q_n^2}{J_n} = \lambda^2$$

и

$$q_1 = \lambda\sqrt{J_1},\quad q_2 = \lambda\sqrt{J_2},\ \ldots,\ q_n = \lambda\sqrt{J_n}. \tag{12}$$

Множитель пропорциональности λ легко определить из уравнения связи:

$$\lambda = \frac{\rho}{e}\cdot\sum_{i=1}^{n} l_i\sqrt{J_i}.$$

Если применить метод Лагранжа, то нужно построить вспомогательную функцию *)

$$\Phi(q_1, q_2, \ldots, q_n) = l_1 q_1 + \ldots + l_n q_n + \lambda^2\left(\frac{l_1 J_1}{q_1} + \ldots + \frac{l_n J_n}{q_n}\right)$$

и приравнять нулю ее производные:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} = l_1 - \frac{\lambda^2 l_1 J_1}{q_1^2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial\Phi}{\partial q_n} = l_n - \frac{\lambda^2 l_n J_n}{q_n^2} = 0,$$

откуда снова получаем (12), и т. д.

3) В качестве более сложного примера рассмотрим такую задачу: трехосный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c)$ пересечен плоскостью $lx + my + nz = 0$, проходящей через его центр; требуется определить полуоси получающегося в сечении эллипса. Иными словами, нужно найти экстремальные значения функции $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, если переменные подчинены указанным выше двум уравнениям связи.

Метод исключения зависимых дифференциалов n° 319 здесь приводит к сложным выкладкам; поэтому мы сразу прибегнем к методу Лагранжа.

Для того чтобы убедиться, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

---

*) «Неопределенный множитель» мы для удобства берем в форме λ^2 и включаем в него постоянную ρ.

равен 2 во всех точках пересечения эллипсоида с плоскостью *), допустим противное. Из обращения в 0 всех определителей второго порядка следует пропорциональность элементов верхней и нижней строк; но тогда равенство $lx+my+nz=0$ влечет за собой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, что невозможно.

Составив вспомогательную функцию

$$\Phi(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+2\mu(lx+my+nz),$$

приравняем нулю ее производные:

$$x+\lambda\cdot\frac{x}{a^2}+\mu l=0,\quad y+\lambda\cdot\frac{y}{b^2}+\mu m=0,\quad z+\lambda\cdot\frac{z}{c^2}+\mu n=0. \qquad (13)$$

Умножая эти уравнения, соответственно, на x, y, z и складывая, получим (с учетом уравнений связи), что $\lambda=-r^2$.

Если предположить, для определенности, что ни одно из чисел l, m, n не равно нулю, то из (13) можно усмотреть, что r не равно ни a, ни b, ни c. Тогда уравнения (13) перепишутся в виде:

$$x=-\mu\frac{la^2}{a^2-r^2},\quad y=-\mu\frac{mb^2}{b^2-r^2},\quad z=-\mu\frac{nc^2}{c^2-r^2}.$$

Отсюда легко найти μ, а с ним и x, y, z; но, минуя это, можно, сложив эти равенства, предварительно умноженные на l, m, n, получить уравнение

$$\frac{l^2a^2}{a^2-r^2}+\frac{m^2b^2}{b^2-r^2}+\frac{n^2c^2}{c^2-r^2}=0,$$

откуда непосредственно и определяются интересующие нас два экстремальных значения r^2.

Так как существование этих экстремальных значений наперед известно, то здесь, таким образом, получается полное решение вопроса.

322. Понятие независимости функций. Рассмотрим систему функций

$$\left.\begin{aligned} y_1&=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ y_2&=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m&=f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

определенных и непрерывных, вместе со своими частными производными, в некоторой n-мерной открытой области $\mathcal{D}$.

Может случиться, что одна из них, например y_j, является функцией от остальных:

$$y_j=\Phi(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m)\ {}^{**}), \qquad (15)$$

*) См. замечание в n° 320.

**) Существенно, что функция Φ в числе своих непосредственных аргументов не содержит x-ов.

где Φ также предполагается непрерывной функцией от всех аргументов с непрерывными же частными производными, в $(m-1)$-мерной области $\mathcal{E}$, содержащей всевозможные системы значений $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_m$, которые принимают эти функции, когда n-мерная точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пробегает область $\mathcal{D}$. При этом мы подразумеваем, что равенство (15) выполняется *тождественно* относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в области $\mathcal{D}$. Тогда говорят, что *в этой области функция* y_j *зависит от остальных*. В частности, так будет, если y_j сводится к постоянной: в этом случае можно положить и $\Phi = \text{const}$.

Функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называют вообще *зависимыми* в области $\mathcal{D}$, если одна из них (все равно какая) зависит от остальных.

Если ни в области $\mathcal{D}$, ни в какой-либо частичной, в ней содержащейся, области не имеет место тождество вида (15), то функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называют *независимыми* в области $\mathcal{D}$.

Ответ на вопрос о независимости функций дает рассмотрение так называемой *функциональной матрицы*, составленной из частных производных этих функций по всем независимым переменным:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Предполагая $n \geqslant m$, прежде всего имеем такую теорему:

Теорема 1. *Если хоть один определитель m-го порядка, составленный из элементов матрицы* (16), *отличен от нуля в области $\mathcal{D}$, то в этой области функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ независимы.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{17}$$

Если бы неравным нулю был не этот, а какой-нибудь другой определитель, то, изменив нумерацию переменных, можно было бы свести вопрос к случаю (17).

Доказательство теоремы будем вести от противного. Предположим, что одна из функций, например y_m, выражается через остальные, так что

$$y_m = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}), \tag{18}$$

хотя бы в некоторой части $\mathscr{D}_0$ области $\mathscr{D}$.

Продифференцировав это тождество по каждой из переменных x_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), мы получим ряд тождеств (в $\mathscr{D}_0$) вида

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Мы видим, что элементы последней строки определителя (17) получаются путем сложения соответственных элементов первых $m-1$ строк, умноженных предварительно на множители $\frac{\partial y_m}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$. Такой определитель, как известно, равен нулю. Это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает невозможность равенства (18).

323. Ранг функциональной матрицы. Переходя к общему случаю, введем следующее определение. Назовем рангом функциональной матрицы (16) (в области $\mathscr{D}$) наивысший из порядков определителей, образованных из строк и столбцов этой матрицы и не обращающихся в нуль тождественно в $\mathscr{D}$. Может, конечно, случиться, что все элементы матрицы (16) тождественно обращаются в нуль (тогда говорят, что ранг матрицы 0), но этот случай не представляет интереса, ибо здесь попросту все функции

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

сводятся к постоянным. Если ранг матрицы (16) есть $\mu \geq 1$, то существует хотя бы один определитель μ-го порядка, составленный из элементов матрицы (это, конечно, предполагает $m \geq \mu$ и $n \geq \mu$) и не равный в $\mathscr{D}$ тождественно нулю, в то время как все определители порядка выше μ (если таковые имеются) тождественно равны нулю. Говорят, что ранг μ матрицы достигается в точке P_0, если упомянутый определитель μ-го порядка отличен от нуля в этой точке.

Теорема 2. *Пусть ранг функциональной матрицы* (16) *в области $\mathscr{D}$ есть $\mu \geq 1$, и достигается он в точке M_0. Тогда в некоторой окрестности $\mathscr{D}_0$ этой точки μ функций, из числа наших m, будут независимыми, а остальные $m-\mu$ от них зависят.* [При этом независимыми будут именно те функции, производные которых входят в определитель, отличный от нуля в точке M_0.]

Доказательство, для упрощения письма, мы проведем для частного случая. Предположим, что даны три функции от трех переменных:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3), \tag{19}$$

причем ранг функциональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad (16^*)$$

равен двум и достигается в точке $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)$. Пусть в этой точке отличен от нуля, скажем, определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}. \qquad (20)$$

Ввиду непрерывности частных производных, то же будет и в некоторой окрестности точки M_0, так что, по теореме 1, функции y_1 и y_2 в этой окрестности независимы.

Положим

$$f_1(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0) = y_1^0, \quad f_2(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0) = y_2^0$$

и применим к системе уравнений

$$f_1(x_1,\ x_2,\ x_3) - y_1 = 0, \quad f_2(x_1,\ x_2,\ x_3) - y_2 = 0 \qquad (21)$$

с пятью переменными x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, в окрестности точки $P_0(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ y_1^0,\ y_2^0)$, которая этой системе удовлетворяет, теорему, аналогичную теореме 3 n° **317**. Именно, пользуясь тем, что определитель, составленный из частных производных от левых частей уравнений (21) по x_1 и x_2, в точке P_0 отличен от нуля, мы можем утверждать, что в некоторой окрестности

$$\mathcal{M}_0 = (x_1^0 - \delta_1,\ x_1^0 + \delta_1;\ \ x_2^0 - \delta_2,\ \ x_2^0 + \delta_2;\ x_3^0 - \delta_3,\ \ x_3^0 + \delta_3;$$
$$y_1^0 - \Delta_1,\ \ y_1^0 + \Delta_1;\ \ y_2^0 - \Delta_2,\ \ y_2^0 + \Delta_2)$$

этой точки система (21) определяет именно x_1 и x_2 как однозначные функции от x_3, y_1 и y_2:

$$x_1 = \varphi_1(x_3,\ y_1,\ y_2), \quad x_2 = \varphi_2(x_3,\ y_1,\ y_2). \qquad (22)$$

Напомним, что — если ограничиться областью $\mathcal{M}_0$ — системы (21) и (22) совершенно равносильны: точки упомянутой области, удовлетворяющие одной из этих систем, удовлетворяют и другой. Из самой теоремы, на которую мы опирались, следует, что, если вместо x_1 и x_2 подставить в (21) функции (22),

то получатся тождества относительно переменных x_3, y_1, y_2 в параллелепипеде

$$(x_3^0-\delta_3,\ x_3^0+\delta_3;\ y_1^0-\Delta_1,\ y_1^0+\Delta_1;\ y_2^0-\Delta_2,\ y_2^0+\Delta_2).$$

Но для нас сейчас важно и другое: *если вместо* y_1 и y_2 *подставить в* (22) *функции* f_1 *и* f_2, *то получатся тождества относительно переменных* x_1, x_2, x_3 — по крайней мере в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. Именно, достаточно выбрать эту окрестность

$$\mathscr{D}_0=(x_1^0-\bar\delta_1,\ x_1^0+\bar\delta_1;\ x_2^0-\bar\delta_2,\ x_2^0+\bar\delta_2;\ x_3^0-\bar\delta_3,\ x_3^0+\bar\delta_3)$$

так, чтобы было:

$$0<\bar\delta_1\leqslant\delta_1,\ 0<\bar\delta_2\leqslant\delta_2,\ 0<\bar\delta_3\leqslant\delta_3,$$

и, кроме того, чтобы для ее точек значения y_1 и y_2, определяемые из (21), т. е. значения функций f_1 и f_2, отличались от y_1^0 и y_2^0, соответственно, меньше, чем на Δ_1 и Δ_2 *). Действительно, тогда точка $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$ попадет в $\mathscr{M}_0$, и одновременно с равенствами (21) должны выполняться и равенства (22).

Обратимся теперь к третьей функции

$$y_3=f_3(x_1, x_2, x_3);$$

подставив вместо x_1 и x_2 сюда функции (22), получим

$$y_3=f_3(\varphi_1(x_3, y_1, y_2), \varphi_2(x_3, y_1, y_2), x_3)\equiv\Phi(x_3, y_1, y_2). \tag{23}$$

На основании сделанного выше замечания, если в это равенство вместо y_1, y_2 и y_3 подставить, соответственно, функции f_1, f_2 и f_3, то оно удовлетворится тождественно относительно x-ов в области $\mathscr{D}_0$.

Для того чтобы убедиться в зависимости функции y_3 от функций y_1 и y_2, остается лишь доказать, что функция Φ в (23) на деле аргумента x_3 не содержит, так что (23) можно написать так:

$$y_3=\Phi(y_1, y_2).$$

С этой целью, очевидно, достаточно установить, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=0 \tag{24}$$

тождественно относительно x_3, y_1, y_2. По самому определению Φ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}=\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}. \tag{25}$$

---

*) Это можно осуществить ввиду непрерывности функций f_1 и f_2, принимающих в точке M_0 значения y_1^0 и y_2^0.

С другой стороны, если продифференцировать по x_3 уравнения (21), считая x_1 и x_2 функциями от x_3, y_1, y_2, то получим равенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=0,\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}=0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

линейные относительно величин $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}$ и $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}$. Из линейных равенств (26), как следствие, вытекает третье линейное равенство:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}=0, \tag{26*}$$

потому что определитель третьего порядка, составленный из коэффициентов при упомянутых величинах и из свободных членов

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

тождественно равен нулю (ведь ранг матрицы (16) есть два!). Сопоставление равенства (26*) с (25) и приводит к требуемому тождеству (24).

Пример. Рассмотрим систему функций

$$y_1=x_1+x_2+x_3,\quad y_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$
$$y_3=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1.$$

Легко проверить, что функциональная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3\\ x_2+x_3 & x_3+x_1 & x_1+x_2 \end{pmatrix}$$

будет иметь ранг 2 во всем пространстве. В соответствии с этим, одна из функций будет зависеть от двух других, например,

$$y_2=y_1^2-2y_3.$$

§ 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ ФОРМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

324. Функциональные определители. В предыдущих параграфах важным орудием исследования служили особого рода определители, составленные из частных производных; они по отношению к системам функций играли такую же роль, какую играет обыкновенная производная для одной функции [ср., например, тексты теорем 1 и 3, n° 315, 317]. Мы изучим здесь некоторые формальные их свойства

(также напоминающие соответствующие свойства обыкновенных производных), что облегчит использование упомянутых определителей в дальнейшем.

Пусть даны n функций от n переменных

$$\left.\begin{aligned} y_1&=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ y_2&=f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n&=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которые определены в некоторой n-мерной области $\mathcal{D}$ и имеют в ней непрерывные частные производные по всем переменным. Составим из этих производных определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется *функциональным определителем* системы функций (1) по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначается, для краткости, символом

$$\frac{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

сходным с обозначением обыкновенной производной.

Функциональные определители были введены в науку примерно одновременно (в конце 1833 и в начале 1834 г.) Якоби и Остроградским, в связи с одним и тем же вопросом — о замене переменных в кратных интегралах [см. ниже n° **355**, **359** и **384**]. Несколько позже (в 1841 г.) Якоби опубликовал работу, где были изучены свойства этих определителей и даны в развернутом виде их приложения как к упомянутому вопросу, так и к теории неявных функций. В связи с этим функциональные определители и стали обычно называть *определителями Якоби* или *якобианами*. Обозначение функциональных определителей, указанное выше, предложил впоследствии английский математик Донкин.

325. Умножение функциональных определителей. Для упрощения записи ограничимся, например, определителями третьего порядка: полученные результаты будут иметь совершенно общий характер. Итак, исходим из системы функций

$$\left.\begin{aligned} y_1&=f_1(x_1, x_2, x_3),\\ y_2&=f_2(x_1, x_2, x_3),\\ y_3&=f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} \tag{1*}$$

которые определены в (трехмерной) области $\mathcal{D}$ и имеют в ней непрерывные частные производные по всем переменным. Кроме системы функций (1*), возьмем систему функций

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, t_2, t_3), \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, t_2, t_3), \\ x_3 &= \varphi_3(t_1, t_2, t_3), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

определенных и имеющих непрерывные производные в (трехмерной же) области $\mathcal{P}$. Пусть при изменении точки (t_1, t_2, t_3) в $\mathcal{P}$ соответствующая точка (x_1, x_2, x_3) не выходит из области $\mathcal{D}$, так что y_1, y_2, y_3 можно рассматривать как сложные функции от t_1, t_2, t_3 через посредство x_1, x_2, x_3. Умножим теперь функциональный определитель системы (1*)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

на функциональный определитель системы (2)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{vmatrix}.$$

При этом мы воспользуемся известной теоремой умножения определителей, которая выражается формулой

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix},$$

где

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

(умножается «строка на столбец»). В нашем случае

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_k},$$

т. е. — по формуле для производной сложной функции —

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial t_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Окончательно в результате получается определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \frac{\partial y_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial t_1} & \frac{\partial y_3}{\partial t_2} & \frac{\partial y_3}{\partial t_3} \end{vmatrix},$$

а это есть функциональный определитель системы функций y_1, y_2, y_3 по переменным t_1, t_2, t_3. Итак, в кратких обозначениях:

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}. \tag{3}$$

Если бы имели одну функцию y от x, где x есть в свою очередь функция от одной переменной t, то получили бы обычную формулу для производной сложной функции: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$; полученная нами формула (3) является ее обобщением.

Отметим особо случай, когда переменные t_1, t_2, t_3 тождественны с y_1, y_2, y_3, так что система функций (2) есть просто результат «обращения» системы (1) (самую возможность такого обращения мы здесь допускаем). Тогда найденное выше соотношение сведется к следующему:

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)} = 1 \tag{4}$$

или

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}}. \tag{5}$$

В этом виде оно напоминает формулу для производной обратной функции.

326. Умножение неквадратных функциональных матриц. И здесь мы выясним общий результат на примере умножения прямоугольных матриц частного вида. Рассмотрим сначала числовые матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

Как известно, их произведением называется квадратная матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Определитель второго порядка, соответствующий этой матрице:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix},$$

равен сумме произведений попарно взятых определителей второго порядка, соответствующих перемножаемым матрицам:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определители, легко проверить это тождество непосредственно (в высшей алгебре устанавливается и общая теорема, относящаяся к умножению прямоугольных матриц).

Применим теперь этот результат к функциональным матрицам. Пусть имеем две функции y_1, y_2 от трех переменных x_1, x_2, x_3:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3),$$

причем, в свою очередь, переменные x_1, x_2, x_3 являются функциями от двух переменных t_1, t_2:

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \quad x_2 = \varphi_2(t_1, t_2), \quad x_3 = \varphi_3(t_1, t_2).$$

Предполагая для всех функций существование непрерывных частных производных, постараемся найти выражение для функционального определителя от системы функций y_1 и y_2 по переменным t_1 и t_2. С этой целью перемножим две функциональные матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{pmatrix}.$$

В данном случае

$$a_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \qquad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3)$$

$$b_{jk} = \frac{\partial x_j}{\partial t_k} \qquad (j = 1, 2, 3; \ k = 1, 2)$$

и, наконец,

$$c_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \frac{\partial y_i}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial t_k}.$$

Применяя здесь указанный выше результат, получим тождество

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \end{vmatrix},$$

которое в кратких обозначениях перепишется так:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)} = \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)} +$$

$$+ \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)} \cdot \frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)}. \qquad (6)$$

Если бы речь шла об одной функции y, которая зависит от одной переменной t через посредство трех переменных x_1, x_2, x_3, то получилась бы обычная формула для дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt};$$

формула (6) есть ее аналог.

В дальнейшем мы еще глубже изучим аналогию между производными и функциональными определителями [n° 354, 2°; n° 383].

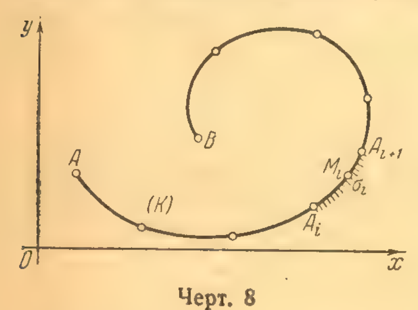
ГЛАВА ДВАДЦАТАЯ

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО ТИПА

327. Определение криволинейного интеграла первого типа. Для того чтобы естественным путем прийти к этому новому понятию, рассмотрим одну механическую задачу, которая к нему приводит.

Пусть дана плоская простая*) спрямляемая кривая (K) (черт. 8), вдоль которой расположены массы, причем известна их линейная плотность $\rho(M)$ во всех точках M кривой. Требуется определить массу m всей кривой (K).



Черт. 8

С этой целью между концами A и B кривой вставим произвольно ряд точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ (A_0 и A_n для симметрии обозначений отождествляются с A и B). Мы считаем для определенности, что точки эти перенумерованы в направлении от A к B, хотя ничто не мешало бы нам нумеровать их и в обратном направлении.

Взяв какую-нибудь точку M_i на дуге A_iA_{i+1} кривой, вычислим плотность $\rho(M_i)$ в этой точке. Приближенно считая, что такова же плотность во всех точках этого участка, и обозначая длину дуги A_iA_{i+1} через σ_i, для массы m_i этой дуги будем иметь приближенное выражение

$$m_i = \rho(M_i)\,\sigma_i,$$

---

*) Непрерывная кривая называется простой, если она задана параметрически, и каждая ее точка получается лишь при одном значении параметра; в случае замкнутой простой кривой исключение представляет единственная точка, в которой «кривая замыкается» и которая отвечает двум крайним значениям параметра.

а для всей искомой массы — выражение

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\,\sigma_i.$$

Погрешность этого последнего, связанная со сделанным выше приближенным допущением, будет стремиться к нулю, если длины σ_i всех участков стремятся к нулю.

Таким образом, обозначая через λ наибольшую из длин σ_i, для получения точной формулы остается лишь перейти к пределу:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\,\sigma_i.$$

Станем же изучать вообще пределы этого рода и, отвлекаясь от рассмотренной задачи, возьмем произвольную «функцию точки» $f(M) = f(x, y)$, заданную вдоль непрерывной плоской спрямляемой кривой (K) *), и повторим указанный процесс: разбив кривую (K) на элементарные дуги A_iA_{i+1} и выбрав на них произвольно по точке $M_i(\xi_i, \eta_i)$, вычислим значения $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ в них и составим сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\sigma_i;$$

она представляет собой также своего рода интегральную сумму.

Конечный предел этой суммы при стремлении $\lambda = \max \sigma_i$ *к нулю называется криволинейным интегралом* (*первого типа* **)) *от функции* $f(M) = f(x, y)$, *взятым по кривой или по пути* (K), и обозначается символом

$$\int_{(K)} f(M)\,ds = \int_{(K)} f(x, y)\,ds \qquad (1)$$

(где s есть длина дуги кривой, и ds напоминает об элементарных длинах σ_i).

Точную характеристику предельного процесса можно предоставить читателю.

---

*) При этом предполагается, что в основу положена некоторая прямоугольная система координат.

) В отличие от криволинейных интегралов второго типа, рассматриваемых ниже [n° **330].

Таким образом, полученное выше выражение для массы материальной кривой может быть переписано так:

$$m = \int\limits_{(K)} \rho\, ds. \tag{2}$$

Отметим особо, что в приведенном определении не играет никакой роли ***направление****, которое может быть придано пути* (K). Если, например, эта кривая не замкнута и под (AB) и (BA) разуметь разно направленные кривые, то

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\, ds = \int\limits_{(BA)} f(M)\, ds.$$

Аналогично рассмотренному, мы могли бы ввести понятие интеграла, распространенного на **пространственную** кривую (K):

$$\int\limits_{(K)} f(M)\, ds = \int\limits_{(K)} f(x, y, z)\, ds\,^{*)}.$$

Ввиду отсутствия новых принципиальных моментов нет надобности вдаваться здесь в подробности.

328. Сведе́ние к обыкновенному определенному интегралу. Предположим, что на кривой (K) произвольно установлено направление (одно из двух возможных), так что положение точки M на кривой может быть определено длиной дуги $s = \breve{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда кривая (K) параметрически выразится уравнениями вида:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant S),$$

а функция $f(x, y)$, заданная в точках кривой, сведется к сложной функции $f(x(s), y(s))$ от переменной s.

Если через s_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ обозначить значения дуги, отвечающие выбранным на дуге AB точкам деления A_i, то, очевидно, $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$. Обозначив через $\bar{s}_i$ значения s, определяющие точки M_i (причем, очевидно, $s_i \leqslant \bar{s}_i \leqslant s_{i+1}$), видим, что интегральная сумма для криволинейного интеграла

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i))\,\Delta s_i$$

---

*) В основу кладется некоторая прямоугольная система координат. Функция f определена лишь в точках кривой (K).

является в то же время интегральной суммой для обыкновенного определенного интеграла, так что сразу имеем:

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds = (\mathrm{R})\int\limits_0^S f(x(s),\ y(s))\,ds\ ^{*}), \tag{3}$$

причем существование одного из интегралов влечет за собой существование другого.

Интеграл, очевидно, существует, например, в случае непрерывности функции $f(M)$ **), что мы будем впредь предполагать.

Пусть теперь кривая (K) задана произвольными параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T),$$

где функции φ и ψ непрерывны со своими производными φ' и ψ'; предположим, сверх того, что кратных точек на кривой нет. Тогда кривая заведомо спрямляема, и если возрастание дуги $s=\breve{AM}=s(t)$ отвечает возрастанию параметра t, то

$$s'(t)=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

[n°201, 202]. Заменяя переменную в интеграле (3) справа, сразу получим:

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds = (\mathrm{R})\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\ \psi(t))\ \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{4}$$

Таким образом, *для вычисления криволинейного интеграла первого типа надлежит заменить в подинтегральной функции переменные x и y выражениями координат через параметр, а множитель ds — дифференциалом дуги как функции параметра.*

Если бы при возрастании параметра t дуга AM убывала, то стоило бы лишь перейти к дуге BM, чтобы снова прийти к формуле (4). Таким образом, в этой формуле нижний предел интеграла справа должен быть меньше верхнего, каково бы ни было параметрическое задание кривой.

В случае кривой, заданной явным уравнением:

$$y=y(x)\quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

*) Значок (R) указывает, что интеграл понимается здесь в согласии с обыкновенным, римановым, определением.

**) Мы имеем в виду непрерывность в точках кривой (K) и вдоль нее. На языке «ε-δ» это означает, что по $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $|f(M')-f(M)|<\varepsilon$ при $\breve{MM'}<\delta$ (M и M' — точки кривой). При этом предположении и сложная функция $f(x(s),\ y(s))$, поскольку $x(s)$ и $y(s)$ непрерывны, есть также непрерывная функция от s.

формула (4) принимает вид:

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds = (R)\int\limits_a^b f(x,\ y(x))\,\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx. \tag{5}$$

Этому соотношению можно придать и другую форму. В предположении непрерывности функции $y(x)$ вместе с ее производной $y'(x)$ кривая (K) в каждой точке будет иметь определенную касательную, не параллельную оси y. Обозначив через α угол касательной с осью x, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(x) \qquad |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,ds = \int\limits_a^b \frac{f(x,\ y(x))}{|\cos\alpha|}\,dx. \tag{6}$$

В частности, так как, очевидно,

$$\int\limits_{(K)} ds = S,$$

где через S обозначена длина всей кривой (K), то

$$S = \int\limits_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

Замечание. Формула (7) получена нами в результате формальных преобразований. Если бы мы определили длину дуги кривой как предел периметра описанной (а не вписанной) ломаной, то это определение — в случае явного задания кривой — непосредственно привело бы к формуле (7). Предлагаем читателю самому убедиться в этом.

329. Примеры. 1) Вычислим интеграл $I = \int\limits_{(K)} xy\,ds$, если (K) есть четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте.

Исходя из параметрического представления эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, будем иметь:

$$x'_t = -a\sin t, \quad y'_t = b\cos t, \quad \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.$$

Вычисление можно произвести по формуле (4):

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} + b^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

Положим здесь $\cos 2t = z$, тогда $\sin 2t\,dt = -\frac{1}{2}dz$ и

$$I = \frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz =$$

$$= \frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

З а м е ч а н и е. Для большинства постоянно встречающихся кривых (эллипс, гипербола, синусоида и пр.) длина дуги не может быть выражена в элементарных функциях, так как ds не интегрируется в конечном виде. Тем не менее, интеграл $\int\limits_{(K)} f(x, y)\,ds$ и для таких кривых иной раз может быть вычислен в элементарных функциях (как в предыдущем примере), так как присоединение множителя $f(x, y)$ меняет всю структуру подинтегрального дифференциала.

Вопросы, связанные с массами, непрерывно распределенными вдоль материальной кривой, естественным образом приводят к криволинейным интегралам рассмотренного типа.

2) Мы уже имели дело в главе XII [n°206] с вычислением статических моментов плоской кривой относительно осей координат, а также координат ее центра тяжести, в предположении, что «линейная плотность» $\rho = 1$. Читатель легко распространит полученные там формулы на общий случай непрерывного распределения масс. Если использовать введенное понятие криволинейного интеграла, то результаты напишутся в следующем виде:

$$K_y = \int\limits_{(K)} \rho x\,ds, \quad K_x = \int\limits_{(K)} \rho y\,ds,$$

$$x_c = \frac{K_y}{m} = \frac{\int\limits_{(K)} \rho x\,ds}{\int\limits_{(K)} \rho\,ds}, \quad y_c = \frac{K_x}{m} = \frac{\int\limits_{(K)} \rho y\,ds}{\int\limits_{(K)} \rho\,ds}.$$

3) Укажем еще одно применение криволинейного интеграла первого типа — к вопросу о п р и т я ж е н и и материальной точки материальною же кривою.

Как известно, по закону Ньютона, материальная точка M массы m притягивает материальную точку M_0 массы m_0 с силой, направленной от M_0 к M и численно равной $k\cdot\frac{mm_0}{r^2}$, где r — расстояние M_0M, а k — коэффициент, зависящий от выбора основных единиц измерения; впрочем, для простоты мы будем обычно считать его равным единице.

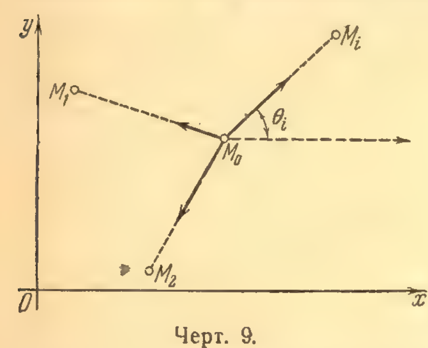
Если точка M_0 притягивается системой точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то результирующая сила, или равнодействующая, получается г е о м е т р и ч е с к и м сложением сил притяжения отдельными точками. В то же время проекции результирующей силы на координатные оси равны а л г е б р а и ч е с к и м суммам проекций отдельных сил.

Если обозначить проекции равнодействующей на оси через X и Y, а угол, составленный вектором $\overrightarrow{r_i}=\overrightarrow{M_0M_i}$ с осью x, через θ_i (черт. 9), то, очевидно,

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\qquad Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

где r_i, как обычно, означает длину вектора $\overrightarrow{r_i}$.

Пусть теперь притягивающая масса распределена непрерывным образом по кривой (K). Для нахождения притяжения разобьем кривую на участки и, сосредоточив массу каждого участка в произвольно выбранной на нем точке M_i, найдем приближенные значения проекций равнодействующей на оси:



Черт. 9.

$$X\doteq\sum_i\frac{m_0\rho(M_i)\,\sigma_i}{r_i^2}\cos\theta_i,$$

$$Y\doteq\sum_i\frac{m_0\rho(M_i)\,\sigma_i}{r_i^2}\sin\theta_i,$$

ибо в этом случае масса отдельного участка приближенно равна $\rho(M_i)\,\sigma_i$. Если устремить все σ_i к нулю, то в пределе получатся точные равенства, причем суммы заменятся интегралами:

$$X=m_0\int\limits_{(K)}\frac{\rho(M)\cos\theta}{r^2}\,ds,\quad Y=m_0\int\limits_{(K)}\frac{\rho(M)\sin\theta}{r^2}\,ds; \tag{8}$$

здесь r означает длину вектора $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{M_0M}$, а θ — угол, составленный им с осью x.

Найдем, например, притяжение, оказываемое однородной полуокружностью (при $\rho=1$) на единицу массы, помещенную в ее центре.

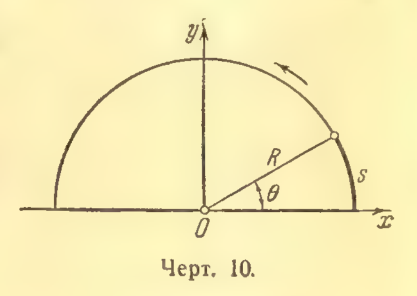
Поместим начало координат в центр полуокружности и ось абцисс проведем через ее концы (черт. 10).

По соображениям симметрии $X=0$, так что дело приводится к нахождению лишь проекции Y. По формуле (8)

$$Y=\int\frac{\sin\theta}{r^2}\,ds.$$

Но в нашем случае $r=R$ (радиус полуокружности) и $ds=R\,d\theta$. Поэтому

$$Y=\frac{1}{R}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{R}.$$



Черт. 10.

§ 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО ТИПА

330. Определение криволинейных интегралов второго типа. Переходя к практически более важному понятию криволинейного интеграла второго типа, мы здесь начнем прямо с его определе-

ния, отложив приложения этого понятия до дальнейших номеров [см., например, n° 335]. Пусть дана простая кривая (AB) (которую мы пока предположим незамкнутой) и пусть вдоль нее снова задана некоторая функция $f(x, y)$ *). Разложив кривую точками $A_i(x_i, y_i)$ на части, выберем на отрезке кривой A_iA_{i+1} по произволу точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и вычислим в ней, как и раньше, значение функции $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Но это значение мы умножим на этот раз не на длину дуги A_iA_{i+1}, а на величину проекции этой дуги, скажем, на ось x, т. е. на $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$; затем составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i.$$

Конечный предел I этой суммы при стремлении $\mu = \max A_iA_{i+1}$ к нулю называется криволинейным интегралом (второго типа) от $f(M)\,dx$, взятым по кривой или по пути (AB) и обозначается символом

$$I = \int_{(AB)} f(M)\,dx = \int_{(AB)} f(x, y)\,dx. \tag{1}$$

Аналогично, умножая значение $f(M_i)$ не на Δx_i, а на Δy_i, т. е. на проекцию дуги A_iA_{i+1} на ось y, и составляя сумму

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i,$$

как предел ее получим *криволинейный интеграл (второго типа) от $f(M)\,dy$*:

$$I^* = \int_{(AB)} f(M)\,dy = \int_{(AB)} f(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Если вдоль кривой (AB) определены две функции $P(M) = P(x, y)$ и $Q(M) = Q(x, y)$, и существуют интегралы

$$\int_{(AB)} P(M)\,dx = \int_{(AB)} P(x, y)\,dx, \qquad \int_{(AB)} Q(M)\,dy = \int_{(AB)} Q(x, y)\,dy,$$

*) См. первую сноску на стр. 213.

то и их сумму называют криволинейным интегралом («общего вида») и полагают

$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx + \int\limits_{(AB)} Q(x, y)\,dy.^{*)} \qquad (3)$$

Сопоставим теперь определение криволинейного интеграла второго типа (1) [или (2)] с определением криволинейного интеграла первого типа [см. n° **327**, (1)]. При очевидном сходстве оба определения имеют существенное различие, которое мы еще раз подчеркиваем: в случае интеграла первого типа при составлении интегральной суммы значение функции $f(M_i)$ *умножается на длину* $\sigma_i = \Delta s_i$ *участка* A_iA_{i+1} *кривой*, а в случае интеграла второго типа это значение $f(M_i)$ *умножается на проекцию* Δx_i (*или* Δy_i) *упомянутого участка на ось* x (*или на ось* y).

Мы видели, что направление пути (AB), вдоль которого производится интегрирование, не играет роли в случае интеграла первого типа, ибо длина σ_i дуги A_iA_{i+1} от этого направления не зависит. Иначе обстоит дело с интегралом второго типа: проекция упомянутой дуги на ту или другую из осей существенно зависит от направления дуги и меняет знак с изменением этого направления на обратное. Таким образом, для интегралов второго типа будет

$$\int\limits_{(BA)} f(x, y)\,dx = -\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dx$$

и аналогично

$$\int\limits_{(BA)} f(x, y)\,dy = -\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dy,$$

причем из существования интегралов справа уже вытекает существование интегралов слева и обратно.

Подобным же образом можно ввести понятие криволинейного интеграла второго типа, распространенного на пространственную (скажем, незамкнутую) кривую (AB). Именно, если функция $f(M) = f(x, y, z)$ задана в точках этой кривой, то, как и выше, строим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i$$

и рассматриваем предел этой «интегральной» суммы при условии стремления к нулю $\mu = \max \overline{A_iA_{i+1}}$. *Этот предел называется*

---

*) Историческую справку по поводу криволинейных интегралов читатель найдет в замечании n° 350.

криволинейным интегралом (второго типа) от $f(M)\,dx$ и обозначается символом

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,dx = \int\limits_{(AB)} f(x,\ y,\ z)\,dx.$$

Аналогично определяются интегралы вида

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,dy = \int\limits_{(AB)} f(x,\ y,\ z)\,dy$$

и

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,dz = \int\limits_{(AB)} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

Наконец, рассматривается и интеграл («общего вида»)

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{(AB)} P\,dx + \int\limits_{(AB)} Q\,dy + \int\limits_{(AB)} R\,dz.$$

Здесь также изменение направления интегрирования меняет знак интеграла.

Заметим в заключение, что простейшие свойства обыкновенного определенного интеграла легко переносятся на рассматриваемый криволинейный интеграл; останавливаться на этом не будем.

331. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго типа. Пусть кривая $(K) = (AB)$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{4}$$

причем функции φ и ψ непрерывны, и при изменении параметра t от α до β кривая описывается именно в направлении от A к B. Функцию $f(x,\ y)$ вдоль кривой (AB) также будем предполагать непрерывной *).

Если речь идет об интеграле (1), то дополнительно обусловим еще существование и непрерывность производной $\varphi'(t)$.

При этих предположениях криволинейный интеграл (1) существует, и имеет место равенство

$$\int\limits_{(AB)} f(x,\ y)\,dx = (\mathrm{R}) \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\ \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5}$$

Таким образом, *для вычисления криволинейного интеграла* (1) *надлежит заменить в подинтегральной функции переменные x и y их выражениями* (4) *через параметр, а множитель dx — дифференциалом переменной x как функции от параметра.* Порядок

*) Здесь можно было бы сделать замечание, аналогичное второй сноске на стр. 215, лишь заменив дугу $\smile MM'$ хордой MM'.

расстановки пределов в последнем интеграле отвечает на этот раз выбранному на кривой направлению.

Переходим к доказательству. Пусть точки A_i ($i=0, 1, 2, \ldots, n$), взятые на кривой, определяются значениями t_i параметра, а выбранная на дуге A_iA_{i+1} точка M_i — значением τ_i (очевидно, лежащим между t_i и t_{i+1}). Тогда интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i,$$

если учесть, что

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\,dt,$$

может быть переписана в виде

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\,dt.$$

С другой стороны, и интеграл в (5) справа *) можно представить в виде суммы:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, предположим теперь все Δt_i настолько малыми, чтобы в промежутках $[t_i, t_{i+1}]$ колебания непрерывной функции $f(\varphi(t), \psi(t))$ были меньше ε. Так как непрерывная функция $\varphi'(t)$ ограничена: $|\varphi'(t)| \leqslant L$, то будем иметь

$$|\sigma - I| < \varepsilon L\,|\beta - \alpha|.$$

Таким образом, при стремлении к 0 величины $\lambda = \max \Delta t_i$ **)

$$\lim \sigma_i = I,$$

чем одновременно доказано как существование криволинейного интеграла, так и требуемое равенство.

---

*) Самое существование интеграла очевидно ввиду непрерывности подинтегральной функции.

**) А это равносильно — в случае незамкнутой кривой — стремлению к 0 наибольшей из хорд [n° 200].

Переходя к интегралу (2), подобным же образом можно установить его существование и доказать формулу

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,dy = (\mathrm{R}) \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\ \psi(t))\,\psi'(t)\,dt \tag{5*}$$

при условии существования непрерывной производной $\psi'(t)$.

Наконец, если речь идет об интеграле общего вида

$$\int\limits_{(AB)} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy,$$

где P и Q суть непрерывные функции, то на кривую (AB) наложим требование, чтобы обе функции (4) имели непрерывные производные. В этом предположении будет справедлива формула

$$\int\limits_{(AB)} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy =$$

$$= (\mathrm{R}) \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\ \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt. \tag{6}$$

Определение криволинейного интеграла и указанный здесь способ свéдения его к обыкновенному определенному интегралу непосредственно распространяются и на случай кривой (4), которая сама себя пересекает, если только направление на ней попрежнему определяется монотонным изменением параметра t от α до β.

В заключение укажем некоторые случаи, когда вычисление криволинейного интеграла представляется особенно простым.

Пусть интеграл (2) берется по кривой, заданной явным уравнением:

$$y = y(x),$$

причем перемещение точки из A в B происходит при изменении x от a до b.

Тогда без каких-либо предположений о кривой, кроме ее непрерывности, имеем

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)\,dx = (\mathrm{R}) \int\limits_{a}^{b} f(x,\ y(x))\,dx. \tag{7}$$

Аналогично, если интеграл (2*) распространяется на непрерывную кривую, заданную явным же уравнением, но другого типа:

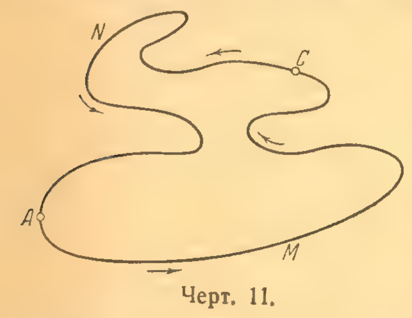
$$x = x(y),$$

где y изменяется от c до ∂, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,\ y)\,dy = (\mathrm{R}) \int\limits_{c}^{\partial} f(x(y),\ y)\,dy. \qquad (7^*)$$

Наконец, если интеграл (2) распространяется на прямолинейный отрезок (AB), параллельный оси y, то он равен 0 (ибо в этом случае равны 0 все Δx_i, а с ними и все суммы σ). Аналогично равен 0 и интеграл (2*), взятый по прямолинейному отрезку, параллельному оси x.

Замечание. Если кривая (K) распадается на конечное число примыкающих одна к другой кривых и вдоль каждой из них в отдельности криволинейный интеграл существует и вычисляется по одной из указанных формул, то легко вычисляется интеграл по всей кривой (K), как сумма интегралов по ее частям.



Черт. 11.

332. Случай замкнутого контура. Ориентация плоскости. Обратимся к рассмотрению замкнутого контура (K), т. е. случая, когда начало A и конец B пути интегрирования совпадают. Взяв на кривой отличную от A точку C, полагают по определению, с учетом выбранного на кривой направления (на черт. 11 оно указано стрелкой):

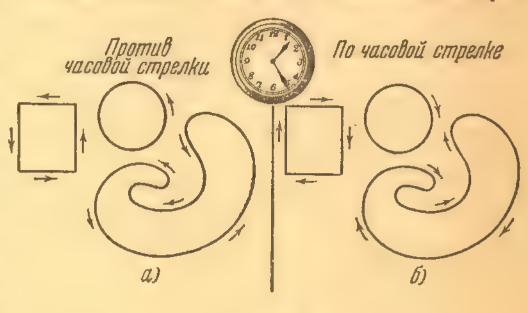
$$\int\limits_{(K)} = \int\limits_{AMC} + \int\limits_{CNA},$$

в предположении, что интегралы справа существуют.

Легко показать что существование и величина интеграла не зависят от выбора точек A и C. Кроме того, и для замкнутого контура (K) оказываются применимыми формулы (5), (5*), (6), выведенные в предыдущем номере.

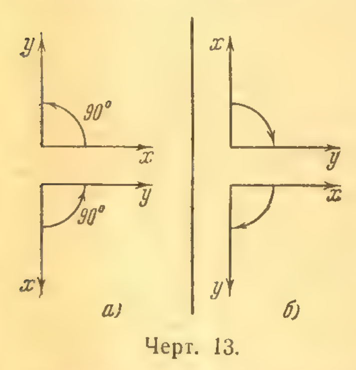
Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что указание начальной и (совпадающей с ней) конечной точки на этот раз не определяет направления, в котором описывается кривая (K). Можно было бы в каждом случае указывать особо, какое именно направление имеется в виду. Так и приходится поступать, если речь идет о пространственной кривой. В случае же плоского замкнутого контура (K) обыкновенно поступают иначе.

Из двух возможных для данной плоскости направлений вращения — «против часовой стрелки» и «по часовой стрелке» — одно выбирается за положительное: этим создается определенная *ориентация плоскости*. Если положительным считается вращение против часовой стрелки, то ориентация плоскости называется правой, в другом же случае — левой.



Черт. 12.

В случае правой ориентации плоскости мы именно вращение против часовой стрелки положим в основу определения положительного направления на простом замкнутом контуре (черт. 12*а*). Правда, это определение имеет достаточно ясный характер лишь для контуров, близких к окружности. Поэтому мы условимся более точно так: положительным направлением обхода простого замкнутого контура называется то, при котором ближайшая к наблюдателю часть области, ограниченной контуром, оказывается лежащей слева от наблюдателя (черт. 12*а*). В случае левой ориентации плоскости положительным будет обход контура по часовой стрелке, так что область остается справа от наблюдателя (черт. 12*б*).



Черт. 13.

Заметим, что самое расположение координатных осей на плоскости всегда ставится в связь с ее ориентацией: ось y получается из оси x поворотом ее на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки при правой ориентации плоскости и по часовой стрелке — при левой (черт. 13 *а*, *б*). В первом случае сама координатная система называется правой, а во втором — левой.

После этих пояснений заключим раз навсегда такое соглашение: *если путь интегрирования* (K) *есть простая замкнутая кривая, то под символом*

$$\int\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy$$

при отсутствии указаний на направление обхода контура *разумеется интеграл, взятый в положительном направлении*. Конечно,

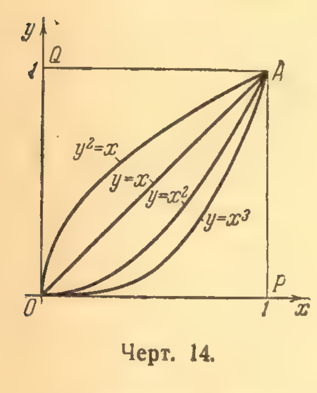
это соглашение не мешает нам рассматривать в случае надобности и интеграл, взятый в отрицательном направлении, но обозначать его мы будем через

$$-\int_{(K)} P\,dx + Q\,dy.$$

333. Примеры. 1) Вычислим значение криволинейного интеграла

$$H = \int_{(L)} 2xy\,dx + x^2\,dy,$$

взятого по пути (L), соединяющему точки O (0, 0) и A (1, 1), если путь (L), есть: (а) прямая $y = x$, (б) парабола $y = x^2$, (в) парабола $x = y^2$, (г) кубическая парабола $y = x^3$ (черт. 14).



Черт. 14.

(а) Так как $dy = dx$, то

$$\int_{(L)} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 3x^2\,dx = 1;$$

(б) $dy = 2x\,dx$, $H = \int_0^1 4x^3\,dx = 1;$

(в) $dx = 2y\,dy$, $H = \int_0^1 5y^4\,dy = 1;$

(г) $dy = 3x^2\,dx$, $H = \int_0^1 5x^4\,dx = 1.$

2) Вычислить криволинейный интеграл

$$G = \int_{(L)} xy\,dx + (y - x)\,dy$$

при тех же путях интегрирования.

Ответ. (а) $\frac{1}{3}$, (б) $\frac{1}{12}$, (в) $\frac{17}{30}$, (г) $-\frac{1}{20}$.

3) Найти криволинейный интеграл

$$I = \int_{(OA)} (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy,$$

если в качестве пути интегрирования берется одна из следующих линий, соединяющих точки O (0, 0) и A (1, 1) (черт. 14): (а) прямолинейный отрезок OA $(y = x)$; б) ломаная OPA, состоящая из отрезка OP оси x $(y = 0)$ и отрезка PA прямой $x = 1$; (в) ломаная OQA, состоящая из отрезка OQ оси y $(x = 0)$ и отрезка QA прямой $y = 1$.

(а) Так как $y = x$ и $dy = dx$, то

$$I = \int_0^1 (x + x^2)\,dx = \frac{5}{6}.$$

(б) В этом случае естественно разбить путь интегрирования на два отрезка:

$$I=\int\limits_{(OPA)}=\int\limits_{(OP)}+\int\limits_{(PA)}=I_1+I_2.$$

Вдоль OP имеем: $y=0$ и $dy=0$, так что

$$I_1=\int\limits_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

Вдоль PA будет: $x=1$ и $dx=0$, поэтому

$$I_2=\int\limits_0^1 2y\,dy=1.$$

Таким образом, окончательно $I=\frac{3}{2}$.

(в) Аналогично предыдущему найдем (так как интеграл вдоль отрезка OQ равен нулю):

$$I=\int\limits_{(QA)}=\int\limits_0^1 (x-1)\,dx=-\frac{1}{2}.$$

4) То же для интеграла

$$I=\int\limits_{(OA)}(y^2+2xy)\,dx+(2xy+x^2)\,dy.$$

Ответ. Во всех случаях $I=2$.

Замечание. Читатель, вероятно, уже обратил внимание на различие между результатами примеров 1) и 4), с одной стороны, и 2) и 3) — с другой. Величины интегралов, рассмотренных в 1) и 4), оказались не зависящими от линии, соединяющей начальную и конечную точки. Напротив, в примерах 2) и 3) мы столкнулись с интегралами, значения которых зависят от того, какой линией соединены начальная и конечная точки. В следующей главе [§ 4] мы займемся этим вопросом специально и выясним его важность.

5) Вычислим интеграл

$$K=\int\limits_{(L)} y^2\,dx-x^2\,dy,$$

где (L) есть окружность радиуса 1 с центром: (а) в начале координат или (б) в точке $(1,\ 1)$.

а) Исходя из параметрических уравнений $x=\cos t$, $y=\sin t$, где t меняется от 0 до 2π, по формуле (6) будем иметь

$$K=-\int\limits_0^{2\pi}(\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt=0.$$

(б) Аналогично с помощью параметрического представления

$$x-1=\cos t, \quad y-1=\sin t$$

получим

$$K=-\int_0^{2\pi}(2+\sin t+\cos t+\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt=-4\pi.$$

334. Связь между криволинейными интегралами обоих типов. Рассмотрим простую *гладкую**) кривую $(K)\equiv(AB)$ и, выбрав в качестве параметра дугу $s=\breve{AM}$, представим ее уравнениями [n° **201, 202**]

$$x=x(s), \quad y=y(s) \qquad (0\leqslant s\leqslant S);$$

функции $x(s)$, $y(s)$ будут иметь непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$. Если через α обозначить угол, составленный с осью x касательной, *направленной в сторону возрастания дуг*, то, как известно [n° **211**, (14)]

$$\cos\alpha=x'(s), \quad \sin\alpha=y'(s).$$

Если вдоль кривой (K) задана непрерывная функция $f(M)=f(x, y)$, то последовательно имеем

$$\int_{(K)} f(M)\,dx=\int_0^S f(x(s), y(s))\,x'(s)\,ds=$$

$$=\int_0^S f(x(s), y(s))\cos\alpha\,ds=\int_{(K)} f(M)\cos\alpha\,ds,$$

и криволинейный интеграл *второго типа* оказался сведенным к криволинейному интегралу *первого типа*.

Аналогично получается

$$\int_{(K)} f(M)\,dy=\int_{(K)} f(M)\sin\alpha\,ds.$$

Если же заданы две непрерывные вдоль кривой (K) функции $P(M)=P(x, y)$ и $Q(M)=Q(x, y)$, то

$$\int_{(K)} P\,dx+Q\,dy=\int_{(K)} (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,ds. \tag{8}$$

Подчеркнем, что во всех этих формулах угол α связан с тем направлением касательной, которое отвечает направлению самой кривой (K). Если изменить направление кривой, то не только интеграл слева изменит знак: ввиду изменения направления касательной угол α изменится на $\pm\pi$, в связи с чем изменит знак и интеграл справа.

*) Кривая (4) называется *гладкой*, если функции φ и ψ имеют непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в нуль.

Очевидно, выведенные формулы остаются справедливыми и для простой кусочно-гладкой кривой *); в этом легко убедиться, если написать их для каждого из гладких кусков кривой и почленно сложить.

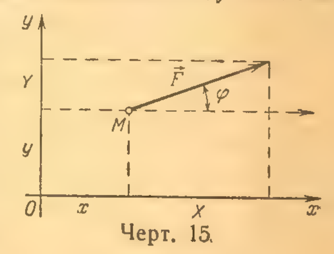
Аналогичные соображения можно развить и для криволинейных интегралов по пространственной кривой. В результате получится формула

$$\int\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{(K)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds, \qquad (9)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ суть направляющие косинусы касательной, в предположении, что ее направление отвечает направлению пути интегрирования.

335. Приложения к физическим задачам. Остановимся в заключение на двух важных задачах из области механики и физики, по которым читатель составит себе представление о прикладной роли введенных в этом номере понятий.

1) *Работа силового поля.* Пусть в каждой точке M плоскости xy (или определенной части плоскости) на помещенную в нее единицу массы действует определенная сила $\vec{F}$, ***величина и направление которой зависят только от положения точки*** M; если масса m помещенной в M материальной точки отлична от единицы, то действующая на нее сила будет равна $m\vec{F}$. При этих условиях плоскость (или рассматриваемая ее часть) называется (*плоским*) *силовым полем*, а сила $\vec{F}$, действующая на единицу массы, — *напряжением поля*. Задание силы $\vec{F}$ по величине и направлению равносильно заданию ее проекций X, Y на оси, очевидно, являющихся функциями от координат x, y точки M:



Черт. 15.

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y).$$

Если φ есть угол, составленный вектором $\vec{F}$ с осью x, то (черт. 15)

$$X = F\cos\varphi, \quad Y = F\sin\varphi. \qquad (10)$$

Предположим теперь, что материальная точка $M(x, y)$, с единичной массой, находящаяся в поле, движется и описывает некоторую непрерывную кривую (K) *в определенном направлении*. Задача состоит в вычислении работы A, которую при этом движении совершают силы поля.

Если бы действующая на точку сила сохраняла постоянную величину F и постоянное направление, а само перемещение точки происходило прямолинейно, то, как известно, работа A выразилась бы произведением перемещения l на проекцию силы на направление перемещения:

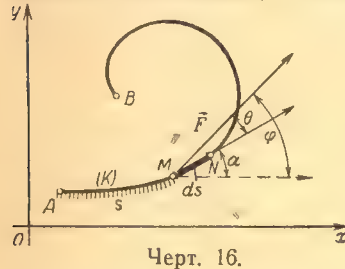
$$A = Fl\cos\theta,$$

где θ — угол между силой $\vec{F}$ и направлением перемещения.

---

*) Так называется кривая, состоящая из нескольких гладких кусков, примыкающих один к другому.

В случае непрямолинейного движения и непостоянной силы работа определяется с помощью некоторого предельного процесса *). Станем определять положение точки M на кривой (K) (черт. 16) длиной s дуги $\breve{AM}$. Рассмотрим бесконечно малый элемент $MN = ds$ кривой; примем его за прямолинейный и будем приближенно считать, что сила $\vec{F}$ и угол θ на перемещении ds сохраняют свою величину. Тогда соответствующий элемент работы будет



Черт. 16.

$$dA = F\cos\theta\, ds.$$

Теперь остается лишь «просуммировать» эти элементы вдоль всей кривой (K), в результате чего работа A выразится криволинейным интегралом первого типа:

$$A = \int_{(K)} F\cos\theta\, ds. \tag{11}$$

Введем угол α между направлением элемента ds (т. е. направлением касательной к кривой в точке M) и осью x. Очевидно, $\theta = \varphi - \alpha$, так что

$$\cos\theta = \cos\varphi\cdot\cos\alpha + \sin\varphi\cdot\sin\alpha,$$

и элемент интеграла, ввиду (10), перепишется так:

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)\, ds.$$

Само выражение (11) для работы примет вид:

$$A = \int_{(K)} (X\cos\alpha + Y\sin\alpha)\, ds.$$

Если теперь учесть формулу (8), устанавливающую связь между криволинейными интегралами обоих типов, то, окончательно, работа силового поля выразится криволинейным интегралом второго типа:

$$A = \int_{(K)} X\,dx + Y\,dy. \tag{12}$$

Это и есть наиболее употребительное выражение для работы A, удобное для исследования ряда важных, связанных с нею вопросов: зависит ли произведенная работа от формы траектории, соединяющей данные две точки; будет ли работа по замкнутой траектории всегда равна нулю [об этом см. ниже п° **348**—**351**].

2) *Плоское установившееся движение несжимаемой жидкости.* Такое движение характеризуется тем, что, во-первых, все частицы, лежащие на одной вертикали к некоторой плоскости, имеют одну и ту же скорость, так что для характеристики всего движения достаточно изучить движение в одной лишь плоскости **), и, во-вторых скорость $\vec{c}$

*) Впрочем, мы здесь и дальше предпочитаем тот короткий способ речи, о котором говорилось в первом томе [п° **204**]. Предельный переход подразумевается.

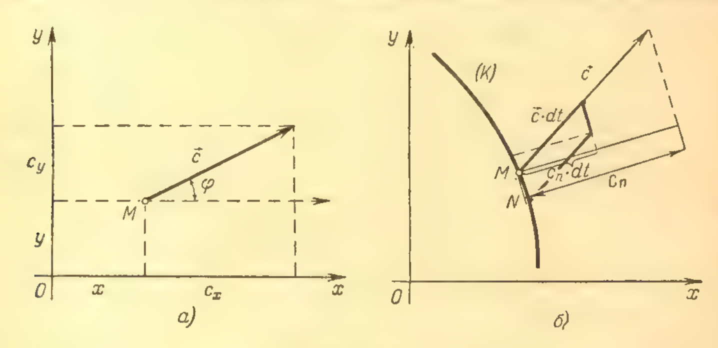
**) Которую мы и выберем за плоскость xy.

частицы жидкости зависит только от положения частицы, но не от времени. Таким образом, с каждой геометрической точкой рассматриваемой плоскости (или ее части) связана определенная по величине и направлению скорость; иными словами, задано некоторое «поле скорости».

Если обозначить угол, составленный вектором $\vec{c}$ с осью x, через φ, а проекции этого вектора на координатные оси — через u и v, то (черт. 17*а*)

$$u = c_x = c \cos\varphi, \quad v = c_y = c \sin\varphi.$$

Возьмем теперь в плоскости xy какую-нибудь кривую (K) и постараемся определить количество Q жидкости, протекающей через нее в определенную от нее сторону в единицу времени. Предполагая жидкость



Черт. 17.

несжимаемой, можно количество жидкости измерять площадью покрытой ею фигуры. Если фактически жидкость течет в сторону, противоположную выбранной, то количество протекающей жидкости будем считать отрицательным.

Рассмотрим элемент $MN = ds$ кривой (K). За время dt через этот элемент протечет количество жидкости, равное

$$c_n \, ds \, dt, \tag{13}$$

где c_n есть проекция скорости $\vec{c}$ на нормаль n к элементу ds, направленную в выбранную сторону от кривой. Действительно, это количество равно площади параллелограмма со сторонами ds и $c\,dt$, высотой которого как раз и является произведение $c_n dt$ (черт. 17*б*) *). Для подсчета количества жидкости, протекающей через элемент ds в единицу времени, суммируем выражения (13) по элементам dt, что дает $c_n ds$. Суммируя же найденные выражения по всем элементам кривой (K), мы представим искомое количество Q жидкости в виде криволинейного интеграла первого типа

$$Q = \int_{(K)} c_n \, ds.$$

*) При этом мы принимаем элемент ds за прямолинейный и считаем, что скорости частиц жидкости во всех его точках одинаковы и за элемент времени dt сохраняют свою величину и направление.

Если, как всегда, α означает угол между касательной и осью x, то $\lambda=\alpha+\frac{\pi}{2}$ даст угол нормали с той же осью. Тогда угол между направлением скорости $\vec{c}$ и нормалью будет $\varphi-\lambda=\varphi-\alpha-\frac{\pi}{2}$, и

$$c_n=c\cdot\cos\left(\varphi-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=c\cdot\sin(\varphi-\alpha)=$$
$$=c\cdot\sin\varphi\cdot\cos\alpha-c\cdot\cos\varphi\cdot\sin\alpha=v\cos\alpha-u\sin\alpha,$$

так что

$$Q=\int_{(K)}(v\cos\alpha-u\sin\alpha)\,ds.$$

Снова учитывая формулу (8), перейдем к криволинейному интегралу второго типа

$$Q=\int_{(K)}v\,dx-u\,dy. \tag{14}$$

При этом важно подчеркнуть, что направление на этой кривой должно быть взято так, чтобы угол между соответствующим направлением касательной и выбранным заранее направлением нормали был равен $+\frac{\pi}{2}$, ибо именно в этом предположении и выведена была формула (14).

Если (K) есть замкнутый контур и интеграл (14) считать взятым (как обычно, n° 332) в положительном направлении, то, чтобы было соблюдено упомянутое только что условие, нормаль должна была бы быть направлена внутрь области, ограниченной контуром (K). Следовательно, в этом случае формула (14) дает количество жидкости, протекающей через контур (K) в единицу времени внутрь области. Если желаем получить количество жидкости, вытекающей наружу из области, ограниченной контуром (K), то следует лишь в формуле (14) изменить знак.

Далее, если поле не имеет ни «источников», ни «стоков» жидкости, то в любой ограниченной области количество жидкости остается постоянным. Поэтому, какую бы замкнутую кривую ни взять, интеграл (14), взятый по ней, должен быть равен нулю.

Итак, *если u и v суть слагающие скорости в плоском установившемся течении несжимаемой жидкости, то при отсутствии источников и стоков*

$$\int_{(K)}v\,dx-u\,dy=0$$

каков бы ни был замкнутый контур (K).

Впоследствии [n° 351, 2)] мы увидим, что этот результат, полученный с помощью физических соображений, позволяет дать и некоторую аналитическую характеристику функций u и v.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

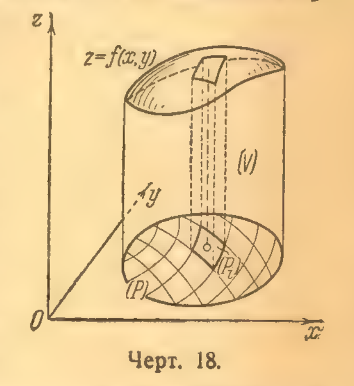
336. Задача об объеме цилиндрического бруса. Наподобие того, как задача о площади криволинейной трапеции привела нас к понятию простого определенного интеграла [n° 175], аналогичная задача об объеме цилиндрического бруса приведет нас к новому понятию — двойного (определенного) интеграла.

Рассмотрим тело (V), которое сверху ограничено поверхностью

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z, наконец, снизу — плоской фигурой (P) на плоскости xy (черт. 18). Требуется найти объем V тела.

Для решения этой задачи мы прибегнем к обычному в интегральном исчислении приему, состоящему в разложении искомой величины на элементарные части, приближенном подсчете каждой части, суммировании и последующем предельном переходе. С этой целью разложим область (P) сетью кривых на части (P_1), (P_2), ... , (P_n) и рассмотрим ряд цилиндрических столбиков, которые имеют своими основаниями эти частичные области и в совокупности составляют данное тело.



Черт. 18.

Для подсчета объема отдельных столбиков возьмем произвольно в каждой фигуре (P_i) по точке: (ξ_i, η_i). Если приближенно принять каждый столбик за настоящий цилиндр с высотой, равной апликате $f(\xi_i, \eta_i)$, то объем отдельного столбика оказывается приближенно равным

$$f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i,$$

где P_i означает площадь фигуры (P_i). В таком случае приближенное выражение объема всего тела будет:

$$V \doteq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i.$$

Для повышения точности этого равенства будем уменьшать размеры площадок (P_i), увеличивая их число. В пределе, при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех областей (P_i), это равенство делается точным, так что

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i,$$

и поставленная задача решена.

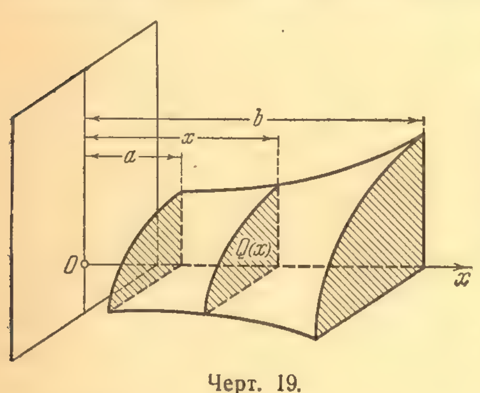
Предел этого вида и есть *двойной интеграл от функции* $f(x, y)$ *по области* (P); он обозначается символом

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP.$$

Полученная выше формула для объема принимает вид

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP^{*}). \qquad (2)$$

Таким образом, двойной интеграл является прямым обобщением понятия простого определенного интеграла на случай функции двух переменных. Он играет важную роль также при определении различных геометрических и физических величин.



Черт. 19.

337. Свед́ение двойного интеграла к повторному. Продолжая трактовать двойной интеграл геометрически как объем цилиндрического бруса, мы дадим здесь же указания относительно его вычисления путем сведения к повторному интегралу.

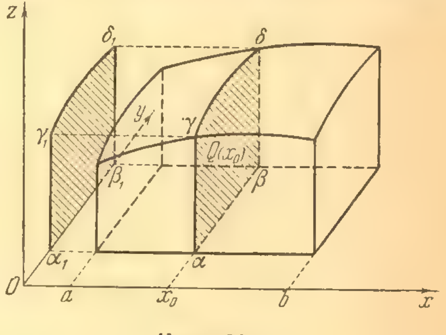
В первом томе мы уже имели дело с задачей вычисления объема тела (V) по

*) В случае непрерывной поверхности (1) и квадрируемой фигуры (P) выводу этой формулы нетрудно придать и вполне строгую форму; см. замечание в n° 340.

его поперечным сечениям [n° 198]. Напомним относящуюся сюда формулу. Пусть тело ограничено плоскостями $x=a$ и $x=b$ (черт. 19). Допустим, что сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси x и отвечающей абсциссе x $(a \leqslant x \leqslant b)$, имеет площадь $Q(x)$. Тогда объем тела, в предположении его существования, выразится формулой

$$V=\int_a^b Q(x)\,dx. \tag{3}$$

Применим теперь эту формулу к вычислению объема цилиндрического бруса, о котором была речь в предыдущем номере. Начнем с простого случая, когда в основании бруса лежит прямоугольник $[a, b; c, d]$ (черт. 20).



Черт. 20.

Сечение бруса плоскостью $x=x_0$ $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$ есть криволинейная трапеция $\alpha\beta\delta\gamma$. Для нахождения ее площади спроектируем эту фигуру на плоскость yz; мы получим конгруентную с ней трапецию $\alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1$, ибо проектирование происходит без искажения. Итак,

$$Q(x_0)=\text{пл. } \alpha\beta\delta\gamma=\text{пл. } \alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1.$$

Но уравнение линии $\gamma_1\delta_1$ на плоскости yz, очевидно, будет

$$z=f(x_0, y) \quad (c \leqslant y \leqslant d).$$

Пользуясь известным выражением площади криволинейной трапеции в виде определенного интеграла будем иметь

$$Q(x_0)=\int_c^d f(x_0, y)\,dy.$$

Так как наше рассуждение относится к любому сечению, то вообще для $a \leqslant x \leqslant b$

$$Q(x)=\int_c^d f(x, y)\,dy\ ^{*)}.$$

*) Эта функция от x к тому же непрерывна [n° 296], что мы и предполагали при выводе формулы (3).

Подставляя это значение $Q(x)$ в формулу (3), получим

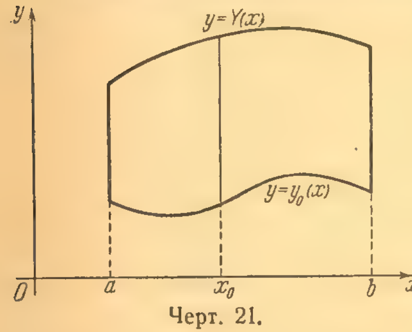
$$V=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Но мы имеем для объема V и выражение (2), следовательно,

$$\iint_{(P)} f(x, y)\,dP=\int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy \tag{4}$$

— двойной интеграл приведен к повторному.

Аналогичный результат можно получить и для более общего случая, когда область (P) на плоскости xy представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную двумя кривыми:



Черт. 21.

$$y=y_0(x),\ y=Y(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$$

и двумя ординатами $x=a$ и $x=b$ (черт. 21). Разница по сравнению с рассмотренным случаем состоит в следующем: раньше при любом фиксированном $x=x_0$ изменение y происходило в одном и том же промежутке $[c, d]$, а теперь этот промежуток

$$[y_0(x_0),\ Y(x_0)]$$

сам зависит от x_0, так что

$$Q(x_0)=\int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0, y)\,dy.$$

Окончательно получим

$$V=\iint_{(P)} f(x, y)\,dP=\int_a^b dx\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy\,^{*}). \tag{5}$$

Мы познакомили читателя с понятием двойного интеграла и с его вычислением в геометрической трактовке.

---

*) И здесь внутренний интеграл представляет собой непрерывную функцию от x [см. n° 299].

338. Определение двойного интеграла. Перейдем теперь к более общему изложению вопроса, с чисто аналитической точки зрения. Впрочем, и здесь нам не обойтись без геометрии или, по крайней мере, без геометрического языка [n° 124—127]. Мы будем говорить о «двумерной области» (P), где определена рассматриваемая функция двух переменных, «кривыми» делить ее на частичные «области», будем брать «площади» этих «областей» и т. д. На деле это «области» и «кривые» из арифметического двумерного пространства, их «точками» служат пары чисел. Но обыкновенно все эти «образы» заменяются для удобства соответствующими им настоящими геометрическими образами, не делая никакой разницы между ними. В частности, под «площадью области» из арифметического двумерного пространства разумеется всегда площадь соответствующей геометрической области.

Напомним, что для квадрируемости области, ограниченной какой-либо кривой, необходимо и достаточно, чтобы эта кривая имела площадь, равную нулю [n° 193]. Широкий класс таких кривых образует непрерывные кривые, выражаемые явными уравнениями, или кривые, состоящие из конечного числа подобных кусков. Отметим здесь (не вдаваясь в доказательство), что тем же свойством, в частности, обладают и гладкие или кусочно-гладкие кривые. *Мы будем предполагать впредь, что как контур области* (P), *так и кривые, которыми мы разлагаем ее на части, все имеют нулевую площадь* (например, принадлежат к указанному классу); этим обеспечивается существование всех нужных нам площадей.

Вернемся теперь к понятию двойного интеграла, фактически уже введенному в n° 336, и дадим в развернутом виде общее его определение.

Пусть в области (P) определена функция $f(x, y)$ *). Разобьем область (P) сетью кривых на конечное число областей (P_1), (P_2), ..., (P_n), площади которых будут P_1, P_2, ..., P_n. Хотя проще всего эти частичные области представлять себе связными, но для облегчения дальнейшего изложения выгодно не исключать для них возможности быть и несвязными. В пределах i-й элементарной области (P_i) возьмем по произволу точку (ξ_i, η_i), значение функции в этой точке $f(\xi_i, \eta_i)$ умножим на площадь P_i соответствующей области и все подобные произведения сложим. Полученную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i$$

будем называть интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области (P).

*) Никаких предположений о непрерывности ее мы при этом не делаем.

Обозначим через λ наибольший из диаметров*) частичных областей (P_i). *Конечный предел l интегральной суммы σ при* $\lambda \to 0$

$$l = \lim \sigma \text{ **)}$$

называется двойным интегралом функции $f(x, y)$ в области (P) и обозначается символом

$$l = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP.$$

Функция, имеющая интеграл, называется *интегрируемой.*

339. Условие существования двойного интеграла. Интегрируемая функция необходимо должна быть ограниченной. Действительно, в противном случае при любом заданном способе разложения области (P) на части можно было бы за счет выбора точек (ξ_i, η_i) сделать интегральную сумму произвольно большой, так что конечного предела l не могло бы существовать.

Обращаясь к рассмотрению условий интегрируемости данной функции $f(x, y)$, мы будем поэтому наперед предполагать ее ограниченной:

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

Как и в случае функции от одной переменной, здесь также удобно ввести так называемые *нижнюю и верхнюю суммы Дарбу:*

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i,$$

где m_i и M_i означают, соответственно, точные нижнюю и верхнюю границы значений функции $f(x, y)$ в области (P_i).

При данном способе разложения области (P) на части, независимо от выбора точек (ξ_i, η_i), будут выполняться неравенства

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Но за счет надлежащего выбора этих точек можно значения $f(\xi_i, \eta_i)$ сделать сколь угодно близкими к $m_i (M_i)$, а вместе с этим сумму σ сделать сколь угодно близкой к $s (S)$. Таким образом, *верхняя и нижняя суммы Дарбу являются, соответственно, точными*

*) Диаметром точечного множества называется точная верхняя граница расстояний между двумя произвольными точками множества. В случае плоской замкнутой области, ограниченной непрерывной кривой, диаметром служит попросту наибольшая хорда.

**) Читатель легко сам установит точный смысл этого нового предела.

верхней и нижней границами интегральных сумм, отвечающих тому же способу разложения области.

Для суммы Дарбу, как и в линейном случае, могут быть установлены следующие свойства.

Первое свойство. *При дальнейшем дроблении частей* (P_i) *с добавлением к прежним линиям деления новых, нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя — не возрастает.*

Второе свойство. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы отвечающей и другому способу разложения области* (P).

Доказательство проводится аналогично прежнему [n° **177**]; лишь в тех случаях, когда там говорилось о точках деления, здесь приходится говорить о линиях деления.

Есть, однако, один момент, на котором нам хотелось бы задержать внимание читателя. В линейном случае каждая новая точка деления отчетливо разлагает один из старых промежутков на два; общей частью двух промежутков является тоже промежуток. В плоском случае положение усложняется тем, что две кривые могут пересекаться между собой во многих точках и даже в бесконечном множестве точек. Поэтому связная частичная область может новой кривой рассекаться и на не связные части; точно так же и общей частью двух связных областей может оказаться не связная область. Вот почему мы с самого начала не исключали из рассмотрения разложения основной области на несвязные части!

Далее, устанавливается существование точных границ

$$I_* = \sup\{s\}, \qquad I^* = \inf\{S\},$$

причем оказывается, что

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S.$$

Наконец, путем буквального воспроизведения доказательства для линейного случая [n° **178**] и здесь получается

Теорема. *Для существования двойного интеграла необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0,$$

или в других обозначениях

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i = 0, \tag{6}$$

где ω_i есть колебание $M_i - m_i$ функции $f(x, y)$ в частичной области (P_i).

340. Классы интегрируемых функций. С помощью установленного выше признака интегрируемости легко доказать:

I. *Всякая непрерывная в области* (P) *функция* $f(x, y)$ *интегрируема.*

Действительно, если функция f непрерывна в (замкнутой) области (P), то по свойству равномерной непрерывности каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что в любой части области (P) с диаметром, меньшим чем δ, колебание функции будет меньше, чем ε. Пусть теперь область (P) разложена на части (P_i), диаметры которых все меньше δ. Тогда все колебания $\omega_i < \varepsilon$, и

$$\sum_i \omega_i P_i < \varepsilon \sum_i P_i = \varepsilon P,$$

откуда и следует выполнение условия (6). Этим интегрируемость функции доказана.

Замечание. Теперь легко уже придать полную строгость выводу формулы (2) для объема цилиндрического бруса. Это делается совершенно так же, как и при выводе интегральной формулы для площади криволинейной трапеции [n° **196**] — с привлечением входящих и выходящих тел, объемы которых выражаются суммами Дарбу.

Для того чтобы несколько расширить класс функций, для которых установлена интегрируемость, мы будем нуждаться в следующей лемме.

Лемма. *Пусть в области* (P) *задана некоторая кривая* (L), *имеющая площадь, равную нулю. Тогда каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* $\delta > 0$, *что лишь только область* (P) *разложена на части с диаметрами, меньшими* δ, *сумма площадей тех из них, которые имеют с* (L) *общие точки, будет меньше* ε.

По предположению кривую (L) можно погрузить в многоугольную область (Q) с площадью, меньшей чем ε. Сделать это можно так, чтобы кривая (L) и контур (K) упомянутой области не имели общих точек. Тогда расстояние между переменными точками обеих кривых достигает своего наименьшего значения $\delta > 0$.

Действительно, пусть указанные непрерывные кривые заданы, соответственно, параметрическими уравнениями:

$$(K)\quad x = \varphi(t),\ y = \psi(t);\qquad (L)\quad x = \varphi^*(u),\ y = \psi^*(u),$$
$$t_0 \leqslant t \leqslant T \qquad\qquad u_0 \leqslant u \leqslant U$$

где φ, ψ, φ^*, ψ^* — непрерывные функции, каждая от своего аргумента. Тогда расстояние между двумя произвольными точками этих кривых

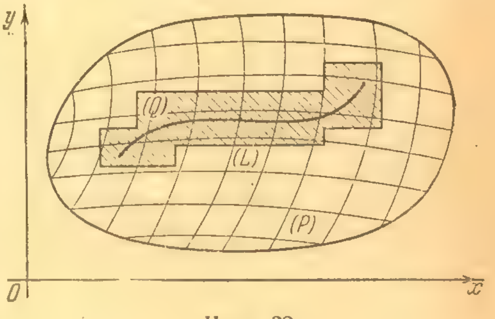
$$\sqrt{[\varphi(t) - \varphi^*(u)]^2 + [\psi(t) - \psi^*(u)]^2}$$

будет непрерывной функцией от (t, u) в замкнутом прямоугольнике $[t_0, T; u_0, U]$ и, следовательно, достигает там своего наименьшего значения [n° 136]. Поскольку кривые не пересекаются, это наименьшее расстояние δ будет отлично от нуля.

Разложим теперь область (P) по произволу на части так, чтобы диаметры их были меньше δ. Те из них, которые задевают кривую (L), необходимо целиком будут лежать в области (Q), следовательно, общая их площадь меньше ε.

II. *Если ограниченная функция $f(x, y)$ имеет разрывы разве лишь на конечном числе кривых с нулевой площадью, то она интегрируема.*

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. По предположению все «линии разрыва» функции $f(x,y)$ можно заключить внутрь многоугольной области (Q) с общей площадью меньше ε. На черт. 22 эта область покрыта штриховкой. Границей ее служит конечное число ломаных (L), которые, очевидно, сами имеют площадь, равную нулю.



Черт. 22.

В замкнутой области, получающейся из (P) выделением внутренности области (Q), функция $f(x, y)$ сплошь непрерывна, значит, и равномерно непрерывна. Следовательно, по заданному $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_1 > 0$, что во всякой части этой области, диаметр которой меньше δ_1, колебание функции $f(x, y)$ будет меньше ε.

Теперь, в силу леммы, можно найти и такое $\delta_2 > 0$, что всякий раз, как область (P) произвольными кривыми разлагается на части с диаметрами, меньшими чем δ_2, сумма площадей тех из них, которые задевают совокупность ломаных (L) — границу выделенной многоугольной области (Q) — наверно будет меньше ε.

Пусть δ будет наименьшее из двух чисел δ_1, δ_2. Разложим область (P) на части (P_1), (P_2), ... , (P_n), диаметры которых меньше δ, и рассмотрим соответствующую сумму

$$\sum_i \omega_i P_i.$$

Разобьем ее на две суммы:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''},$$

предполагая, что значок i' отвечает таким областям $(P_{i'})$, которые целиком лежат вне выделенной области (Q), а значок i'' — всем прочим. Оценим каждую из этих сумм в отдельности.

Так как все $(P_{i'})$ лежат в области, полученной из (P) выделением (Q), и диаметры их $< \delta \leqslant \delta_1$, то все $\omega_{i'} < \varepsilon$, так что

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon P.$$

С другой стороны, если через Ω обозначить колебание функции $f(x, y)$ во всей области (P), то будем иметь (так как $\omega_i \leqslant \Omega$)

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} \leqslant \Omega \sum_{i''} P_{i''}.$$

Здесь $\sum P_{i''}$ есть сумма площадей тех из областей (P_i), которые: 1) либо целиком лежат в выключенной области (Q), 2) либо задевают границу (L) этой области. Общая площадь первых меньше ε, ибо $Q < \varepsilon$; то же можно сказать и об общей площади вторых, поскольку область разложена на части с диаметрами, меньшими чем $\delta \leqslant \delta_2$. Итак, $\sum P_{i''} < 2\varepsilon$, так что

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} < 2\Omega\varepsilon.$$

Окончательно, при $\lambda < \delta$, оказывается:

$$\sum_{i} \omega_i P_i < (P + 2\Omega)\,\varepsilon.$$

Так как правая часть этого неравенства произвольно мала вместе с ε, то выполняется условие (6), и т. д.

341. Свойства интегрируемых функций и двойных интегралов. 1°. *Если произвольным образом изменить значения интегрируемой в (P) функции $f(x, y)$ вдоль какой-либо кривой (L) с нулевой площадью (с тем лишь условием, чтобы и измененная функция оставалась ограниченной), то вновь полученная функция также интегрируема в (P), и ее интеграл равен интегралу от $f(x, y)$.*

Для доказательства нужно составить интегральные суммы для измененной и исходной функций. Они могут разниться лишь теми слагаемыми, которые относятся к областям (P_i), задевающим кривую (L). Но, по лемме n° **340**, общая площадь этих областей стремится к нулю при $\lambda \to 0$, откуда уже легко заключить, что обе интегральные суммы стремятся к общему пределу.

Таким образом, *существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подинтегральной функцией вдоль конечного числа кривых с нулевой площадью.*

2°. *Если область* (P), *в которой задана функция* $f(x, y)$, *кривою* (L) *с нулевой площадью разложена на две области* (P') *и* (P''), *то из интегрируемости функции* $f(x, y)$ *во всей области* (P) *следует ее интегрируемость в частичных областях* (P') *и* (P''), *и обратно — из интегрируемости функции в обеих областях* (P') *и* (P'') *вытекает интегрируемость в области* (P). *При этом*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP = \iint\limits_{(P')} f(x, y)\,dP' + \iint\limits_{(P'')} f(x, y)\,dP''.$$

Разложим области (P') и (P'') произвольным образом на части; тем самым и (P) разложится на части:

$$(P_1),\ (P_2),\ \ldots,\ (P_n).$$

Если значком i' отметить части, содержащиеся в (P'), а значком i'' — части, содержащиеся в (P''), то

$$\sum \omega_i P_i = \sum \omega_{i'} P_{i'} + \sum \omega_{i''} P_{i''}.$$

Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в (P), так что при $\lambda \to 0$ стремится к нулю сумма слева; тогда каждая из сумм справа и подавно стремится к нулю, так что наша функция интегрируема также в (P') и (P'').

Обратно, если имеет место последнее обстоятельство, так что при $\lambda \to 0$ стремятся к нулю обе суммы справа, то и сумма слева также стремится к нулю. Однако нужно помнить, что она построена не для произвольного разбиения области на части: ведь мы исходили из разложения порознь областей (P') и (P'').

Чтобы от произвольного разложения области (P) перейти к разложению этого частного вида, достаточно присоединить к линиям деления кривую (L). Соответствующие им суммы будут разниться лишь слагаемыми, отвечающими тем элементарным областям, которые задевают кривую (L). Но, по лемме n° **340**, их общая площадь стремится к нулю при $\lambda \to 0$, и обе суммы разнятся на бесконечно малую. Таким образом, условие (6) выполняется в полной общности, и функция $f(x, y)$ оказывается интегрируемой в (P).

Наконец, доказываемая формула получается переходом к пределу при $\lambda \to 0$ из равенства

$$\sum f(\xi_i, \eta_i) P_i = \sum f(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'} + \sum f(\xi_{i''}, \eta_{i''}) P_{i''}.$$

Аналогично, из рассмотрения интегральных сумм с помощью перехода к пределу получаются и следующие три свойства:

3°. *Если умножить интегрируемую в* (P) *функцию* $f(x, y)$ *на постоянную* k, *то полученная функция также будет интегрируема, и при этом*

$$\iint\limits_{(P)} k f(x, y)\,dP = k \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP.$$

4°. *Если в области* (P) *интегрируемы функции* $f(x, y)$ *и* $g(x, y)$, *то интегрируема и функция* $f(x, y) \pm g(x, y)$, *причем*

$$\iint\limits_{(P)} [f(x, y) \pm g(x, y)]\,dP = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP \pm \iint\limits_{(P)} g(x, y)\,dP.$$

5°. *Если для интегрируемых в* (P) *функций* $f(x, y)$ *и* $g(x, y)$ *выполняется неравенство* $f(x, y) \leqslant g(x, y)$, то

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP \leqslant \iint\limits_{(P)} g(x, y)\,dP.$$

Далее,

6°. *В случае интегрируемости функции* $f(x, y)$ *интегрируема и функция* $|f(x, y)|$, *и имеет место неравенство*

$$\left|\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP\right| \leqslant \iint\limits_{(P)} |f(x, y)|\,dP.$$

Интегрируемость функции $|f|$ следует из простого замечания, что колебание ω_i^* этой функции в любой области (P_i) не превосходит соответствующего колебания ω_i функции f. Действительно, тогда

$$\sum \omega_i^* P_i \leqslant \sum \omega_i P_i,$$

и стремление к нулю второй суммы влечет за собой стремление к нулю первой.

Доказываемое же неравенство получается предельным переходом из неравенства

$$\left|\sum f(\xi_i, \eta_i) P_i\right| \leqslant \sum |f(\xi_i, \eta_i)| P_i.$$

7°. *Если интегрируемая в* (P) функция $f(x, y)$ *удовлетворяет неравенству*

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

то

$$mP \leqslant \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP \leqslant MP. \tag{7}$$

Это получается предельным переходом из очевидного неравенства

$$mP \leqslant \sum f(\xi_i, \eta_i) P_i \leqslant MP.$$

Если разделить все части неравенства (7) на P:

$$m \leqslant \frac{\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP}{P} \leqslant M$$

и через μ обозначить среднее отношение, то получим другую запись неравенства (7)

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = \mu P \quad (m \leqslant \mu \leqslant M), \tag{8}$$

которая выражает так называемую теорему о среднем значении.

Предположим теперь, в частности, что функция $f(x, y)$ непрерывна в (P), и возьмем в качестве m и M ее наименьшее и наибольшее значения в области (P) — по теореме Вейерштасса [n° 136] они существуют! Тогда по известной теореме Больцано — Коши [n° 134] непрерывная функция $f(x, y)$, принимающая значения m и M, должна пройти и через каждое промежуточное значение. Таким образом, во всяком случае в области (P) должна найтись такая точка $(\bar{x}, \bar{y})$, что $\mu = f(\bar{x}, \bar{y})$, и формула (8) принимает вид:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot P. \tag{9}$$

Это — особенно употребительная форма теоремы о среднем.

Так же легко переносится на рассматриваемый случай и обобщенная теорема о среднем значении [n° 182, 10°]; предоставляем это читателю.

342. Интеграл как аддитивная функция области; дифференцирование по области. Рассмотрим (замкнутую) плоскую область (P) и содержащиеся в ней частичные (замкнутые) области (p). Мы будем предполагать все области квадрируемыми (по обстоятельствам они могут подлежать и другим ограничениям). *Если каждой части (p) области (P) сопоставляется некоторое определенное число*

$$\Phi = \Phi((p)),$$

то этим определяется «функция от области (p)» для указанных (p). Примером такой функции от области могут служить: площадь области, непрерывно распределенная по ней масса, статические моменты этой массы, непрерывно распределенная нагрузка или вообще действующая на нее сила, и т. п.

Если при произвольном разложении области (p) на взаимно не налегающие части

$$(p) = (p') + (p'')$$

всегда оказывается, что

$$\Phi((p)) = \Phi((p')) = \Phi((p'')),$$

то функцию $\Phi((p))$ от области называют аддитивной. Все функции, приведенные выше в виде примера, обладают этим свой-

ством аддитивности. Аддитивные функции от области представляют особую важность, ибо часто встречаются при изучении явлений природы.

Пусть в квадрируемой области (P) задана интегрируемая функция точки $f(M) = f(x, y)$; тогда она будет интегрируема в любой квадрируемой же части (p) области, так что интеграл

$$\Phi((p)) = \iint\limits_{(p)} f(x, y)\, dP \tag{10}$$

также есть функция от области (p). Ввиду n° **341**,2° и она будет, очевидно, аддитивной функцией.

Обратимся теперь к «дифференцированию функции $\Phi((p))$ по области». Пусть M — фиксированная точка области (P), а (p) — любая содержащая эту точку частичная область. *Конечный предел отношения*

$$\frac{\Phi((p))}{p},$$

где p есть площадь области (p), при стремлении к нулю диаметра области (p), называется производной от функции $\Phi((p))$ по области в точке M. Если $\Phi((p))$, например, есть масса, непрерывно распределенная по плоской фигуре (p), то $f(M)$ есть не что иное, как плотность распределения масс в точке M; если $\Phi((p))$ означает силу, действующую на фигуру (p), то $f(M)$ выражает удельное давление в точке M, и т. п.

Особый интерес для нас представляет случай, когда функция от области выражается интегралом вида (10), где $f(x, y)$ — непрерывная в области (P) функция. Мы покажем, что *производной по области в точке M от интеграла будет подинтегральная функция, вычисленная именно в этой точке*, т. е.

$$f(M) = f(x, y).$$

Действительно, взяв область (p), о которой говорится в определении производной, имеем по теореме о среднем [см. (9)]

$$\Phi((p)) = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot p,$$

где $(\bar{x}, \bar{y})$ есть некоторая точка области (p). Если диаметр области (p) стремится к нулю, то точка $(\bar{x}, \bar{y})$ безгранично сближается с (x, y) и, по непрерывности,

$$\frac{\Phi((p))}{p} = f(\bar{x}, \bar{y}) \to f(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Выше нам приходилось уже говорить об аддитивных функциях от промежутка [n° **204**]. Так как такая функция

всегда представляет собой разность двух значений некоторой функции точки, то не было надобности для «линейного» случая развивать теорию вроде изложенной выше для «плоского» случая. Однако в теореме о дифференцировании определенного интеграла по переменному верхнему пределу [n° 183, 12°] читатель легко усмотрит аналог доказанной только что теоремы о дифференцировании двойного интеграла по области.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

343. Приведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области. С этим вопросом в геометрической трактовке и при некоторых частных предположениях мы уже имели дело в n° 337.

Рассмотрим теперь его средствами анализа и притом в самой общей форме; начнем мы с простого случая, когда область интегрирования представляет собой прямоугольник $(P)=[a,\ b;\ c,\ d]$.

Теорема. *Если для функции $f(x, y)$, определенной в прямоугольнике $(P)=[a,\ b;\ c,\ d]$, существует двойной интеграл*

$$\iint\limits_{(P)} f(x,\ y)\,dP \tag{1}$$

и — при каждом постоянном значении x из $[a,\ b]$ — простой интеграл

$$I(x)=\int\limits_c^d f(x,\ y)\,dy \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{2}$$

то существует также повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)\,dy \tag{3}$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_{(P)} f(x,\ y)\,dP=\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)\,dy\,^{*}). \tag{4}$$

Доказательство. Разобьем промежутки $[a,\ b]$ и $[c,\ d]$, определяющие прямоугольник (P), на части, вставляя точки деления

$$x_0=a<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b,$$
$$y_0=c<y_1<\ldots<y_k<y_{k+1}<\ldots<y_m=d.$$

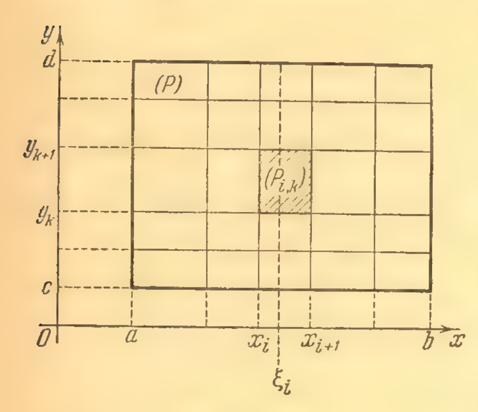
---

*) Читатель легко усмотрит в этом утверждении видоизменение известной теоремы о двойном и повторном пределах [n° 131].

Тогда прямоугольник (P) разложится на частичные прямоугольники (черт. 23):

$$(P_{i,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1; \ k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Обозначим через $m_{i,k}$ и $M_{i,k}$, соответственно, точные нижнюю и верхнюю границы функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $(P_{i,k})$, так что для всех точек (x, y) этого прямоугольника



Черт. 23.

$$m_{i,k} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{i,k}.$$

Фиксируя x в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ по произволу: $x = \xi_i$, и интегрируя по y от y_k до y_{k+1}, будем иметь [n° 182, 8°]

$$m_{i,k}\,\Delta y_k \leqslant \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\,dy \leqslant$$
$$\leqslant M_{i,k}\,\Delta y_k,$$

где $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$; интеграл по y существует, так как предположено существование интеграла (2) по всему промежутку $[c, d]$. Суммируя подобные неравенства по k от 0 до $m-1$, получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\,\Delta y_k \leqslant I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\,\Delta y_k.$$

Если умножить все части этих неравенств на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и просуммировать по значку i от 0 до $n-1$, то найдем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\,\Delta y_k \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k}\,\Delta y_k.$$

Посредине мы получили интегральную сумму для функции $I(x)$. Что же касается до крайних членов, то они представляют собою не что иное, как суммы s и S Дарбу для двойного интеграла (1). Действительно, так как $\Delta x_i\,\Delta y_k$ есть площадь $P_{i,k}$ прямоугольника $(P_{i,k})$, то, например, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\,\Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k}\,\Delta x_i\,\Delta y_k = \sum_{i,k} m_{i,k} P_{i,k} = s.$$

Таким образом, окончательно

$$s \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\, \Delta x_i \leqslant S.$$

Если теперь все Δx_i и Δy_k одновременно устремить к нулю, то, ввиду существования двойного интеграла (1), обе суммы s и S будут стремиться к нему, как к пределу. В таком случае и

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\, \Delta x_i = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP,$$

т. е. двойной интеграл (1) представляет собой в то же время и интеграл от функции $I(x)$:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = \int_a^b I(x)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

что и требовалось доказать.

Меняя роли переменных x и y, наряду с (4) можно доказать и формулу

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{4*}$$

в предположении, что при $y = \text{const}$ существует интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Замечание. Если вместе с двойным интегралом (1) существуют оба простых интеграла:

$$\int_c^d f(x, y)\, dy \; (x = \text{const}) \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x, y)\, dx \; (y = \text{const}),$$

то имеют место одновременно обе формулы, (4) и (4*), откуда

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{5}$$

Применение формулы (4) или (4*) обусловлено существованием двойного интеграла и одного из простых. Если функция $f(x, y)$ непрерывна (случай, который обычно встречается на практике), то существование всех упомянутых интегралов обеспечено. В этом случае любой из упомянутых формул можно пользоваться для

фактического вычисления двойного интеграла, так как вычисление простых интегралов представляет гораздо более легкую задачу.

При доказательстве формулы (4) всего естественнее было разложить прямоугольник (P) прямыми, параллельными осям, на прямоугольные элементы с площадями $\Delta x_i \ \Delta y_k$. Желая в самом символе двойного интеграла указать на происхождение его от деления области на части прямыми, параллельными осями, вместо

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dP$$

часто пишут

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\ dy \left[\text{или } \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dy\, dx\right].$$

Больше того, имея в виду сведение двойного интеграла, распространенного на прямоугольник $(P) \doteq [a, b; c, d]$, к повторному, и самый двойной интеграл часто обозначают символом, сходным с повторным:

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{или} \quad \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

При этом обозначении друг другу соответствуют «внешний интеграл» и «внешний дифференциал», так что стоит лишь поставить скобки, чтобы получить тот или другой из повторных интегралов:

$$\int\limits_a^b \left\{\int\limits_c^d f(x, y)\, dy\right\} dx \quad \text{или} \quad \int\limits_c^d \left\{\int\limits_a^b f(x, y)\, dx\right\} dy.$$

Примеры. 1) $I = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{y\, dx\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Проще представить I по формуле (4) в виде

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ибо сразу получаем:

$$\int\limits_0^1 \frac{y\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}},$$

так что

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\right)dx=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}\Bigg|_0^1=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Если прибегнуть к другому повторному интегралу, то квадратуры окажутся несколько более сложными:

$$I=\int_0^1 y\,dy\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y)^{2\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1+y^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}},$$

$$I=\int_0^1\frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

Легко преобразовать этот ответ к прежнему виду.

2) Найти объем V тела, ограниченного снизу плоскостью xy, с боков — плоскостями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, а сверху — эллиптическим параболоидом

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}.$$

Прежде всего по формуле (2)

$$V=\iint\limits_{[0,\,a;\;0,\,b]}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dP.$$

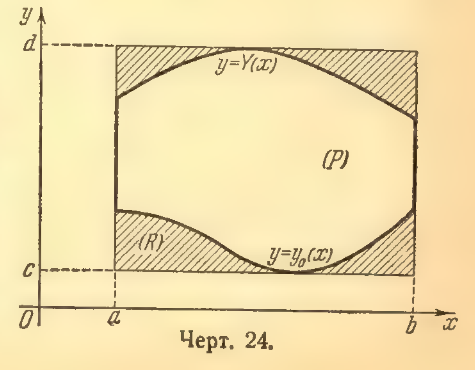
Самое же вычисление интеграла произведем по формуле (4*):

$$V=\int_0^b dy\int_0^a\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx=\int_0^b\left(\frac{a^3}{6p}+\frac{ay^2}{2q}\right)dy=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$$

344. Приведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области. Рассмотрим область (P), ограниченную снизу и сверху двумя непрерывными кривыми:

$$y=y_0(x),$$
$$y=Y(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

а с боков — двумя ординатами: $x=a$ и $x=b$ (черт. 24). Тогда, аналогично теореме n° 343, имеет место следующая



Черт. 24.

Теорема. *Если для функции $f(x, y)$, определенной в области (P), существует двойной интеграл*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP$$

и — при каждом постоянном значении x из $[a, b]$ — простой интеграл

$$I(x) = \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy,$$

то существует также повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy,$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (6)$$

Доказательство строится на сведении этого случая к рассмотренному в n° **343**. Именно, заключим область (P) в прямоугольник

$$(R) = [a, b; c, d],$$

полагая $c = \min\limits_{a \leq x \leq b} y_0(x)$, $d = \max\limits_{a \leq x \leq b} Y(x)$ [черт. 24], и определим в этом прямоугольнике функцию $f^*(x, y)$ следующим образом:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ если точка } (x, y) \text{ принадлежит области } (P), \\ 0 \text{ в прочих точках прямоугольника } (R). \end{cases}$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы n° **343**.

Прежде всего, она интегрируема в области (P), ибо здесь она совпадает с интегрируемой по условию функцией $f(x, y)$; очевидно, поэтому

$$\iint\limits_{(P)} f^*(x, y)\,dP = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP.$$

С другой стороны, $f^*(x, y) = 0$ вне (P) и, следовательно, интегрируема и в остальной части $(Q) = (R) - (P)$ прямоугольника (R) *), причем

$$\iint\limits_{(Q)} f^*(x, y)\,dQ = 0.$$

---

*) Значения ее на границе этой области роли не играют (см. n° **341**, 1°).

Тогда, в силу n° **341**, 2°, функция f^* интегрируема во всем прямоугольнике (R), и

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x, y)\,dR = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP. \tag{7}$$

При постоянном значении x в $[a, b]$ существует интеграл

$$\int\limits_c^d f^*(x, y)\,dy = \int\limits_c^{y_0(x)} f^*\,dy + \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*\,dy + \int\limits_{Y(x)}^d f^*\,dy,$$

ибо существует каждый из трех интегралов справа. Действительно, так как в промежутках $[c, y_0(x))$ и $(Y(x), d]$ изменения y функция $f^*(x, y) = 0$, то первый и третий интегралы существуют, будучи равны нулю. Второй же интеграл совпадает с интегралом от функции $f(x, y)$:

$$\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x, y)\,dy = \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy,$$

поскольку $f^*(x, y) = f(x, y)$ для y в $[y_0(x), Y(x)]$. Окончательно,

$$\int\limits_c^d f^*(x, y)\,dy = \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy. \tag{8}$$

В силу упомянутой теоремы, для функции f^* существует и повторный интеграл, который равен двойному [см. n° **343**, (4)]:

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x, y)\,dR = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f^*(x, y)\,dy.$$

Принимая же во внимание (7) и (8), видим, что эта формула равносильна формуле (6).

Если область (P) представляет собой криволинейную трапецию другого типа и ограничена кривыми

$$x = x_0(y), \quad x = X(y) \quad (c \leqslant y \leqslant d)$$

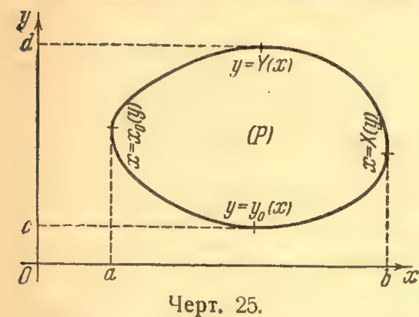
и прямыми $y = c$, $y = d$, то вместо (6) придем к формуле

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dP = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)\,dx, \tag{6*}$$

в предположении, что, наряду с двойным интегралом, при $y = \text{const}$ существует простой интеграл по x.

З а м е ч а н и е. Если контур области (P) пересекается лишь в двух точках как параллелями оси ординат, так и параллелями оси

абсцисс (как, например, в случае, изображенном на черт. 25), то при выполнении указанных условий применимы обе упомянутые формулы. Из сопоставления их получается равенство



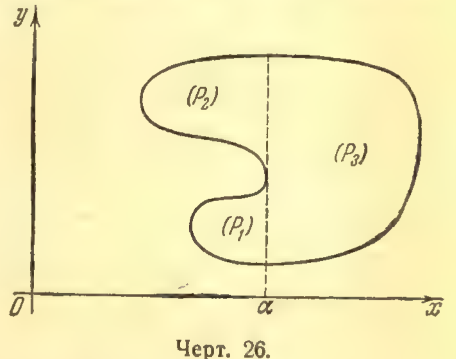
Черт. 25.

$$\int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)\,dx, \qquad (9)$$

которое представляет и самостоятельный интерес. Это — аналог формулы (5) n° **343**.

Если функция $f(x, y)$ в области (P) непрерывна, то интегралы, двойной и простой, существуют, и формулу (6) или (6*), смотря по типу области (P), можно использовать для в ы ч и с л е н и я двойного интеграла.

В случае более сложного контура область (P) обычно разлагается на конечное число частей рассмотренного типа. Например, фигура (P) на черт. 26 рассекается прямою $x=\alpha$ на три такие части: (P_1), (P_2) и (P_3). Тогда и искомый интеграл, в силу n° **341**, 2°, представляется суммой интегралов, распространенных в отдельности на эти части; каждый из них вычисляется, как указано.



Черт. 26.

В общем случае также, поскольку мы свели дело к теореме n° **343**, в основе умозаключений лежит разбиение рассматриваемой фигуры на прямоугольные элементы. В связи с этим и здесь для обозначения двойного интеграла пользуются часто символом

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy;$$

произведение $dx\,dy$ напоминает о площади элементарного прямоугольника.

Само собой понятны и обозначения

$$\int_a^b \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f\,dy\,dx \quad \text{или} \quad \int_c^d \int_{x_0(y)}^{X(y)} f\,dx\,dy.$$

Примеры. 1) Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(P)} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dP,$$

где (P) есть круг радиуса R с центром в начале координат (черт. 27).

Решение. Контур области (P) имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, откуда $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Очевидно $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$ есть уравнение верхней полуокружности, а $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ является уравнением нижней полуокружности. Таким образом, при постоянном x из промежутка $[-R, R]$ переменная y изменяется от $-\sqrt{R^2 - x^2}$ до $+\sqrt{R^2 - x^2}$. По формуле (6) — с учетом четности по y подинтегральной функции —

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{+\sqrt{R^2 - x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dy =$$

$$= 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \int_{0}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2\, dy.$$

Черт. 27.

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_{0}^{\sqrt{R^2 - x^2}} y^2\, dy = \frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Затем — снова с учетом четности —

$$I = \frac{2}{3} \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2\, dx = \frac{4}{3} \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)^2\, dx = \frac{32}{45} R^5.$$

Совершенно аналогично проводится и вычисление по формуле (6*).

2) Вычислить интеграл

$$I = \iint \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

распространенный на треугольник, который образован прямыми $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.

Решение. По формуле (6)

$$I = \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} \sqrt{4x^2 - y^2}\, dy;$$

внутренний интеграл равен

$$\int_{0}^{x} \sqrt{4x^2 - y^2}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin \frac{y}{2x} \Bigg|_{y=0}^{y=x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right) x^2,$$

и окончательно

$$I=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

Можно было бы вести вычисления и по формуле (6*), но в этом случае мы натолкнулись бы на более трудные квадратуры. Подобное обстоятельство всегда следует учитывать при выборе пути для вычисления.

3) Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x+y\leq 1}} x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy,$$

в предположении, что $p\geq 1$, $q\geq 1$ *).

Имеем по формуле (5)

$$I=\int_0^1 x^{p-1}\,dx\int_0^{1-x} y^{q-1}\,dy=\frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx=\frac{1}{q}\,\mathrm{B}(p,\ q+1).$$

Окончательно:

$$\iint\limits_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0\\ x+y\leq 1}} x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

Эта формула принадлежит Дирихле.

4) При $p<1$ (или $q<1$) подинтегральная функция обращается в бесконечность при $x=0$ и $0<y\leq 1$ (или, соответственно, при $y=0$ и $0<x\leq 1$). Обычное определение интеграла здесь уже неприменимо: интеграл оказывается «несобственным» и требует для своего определения дополнительного предельного перехода. Мы поясним это именно на рассмотренном примере, в предположении, что $0<p<1$ и $0<q<1$. Возьмем сначала интеграл ($\varepsilon>0$):

$$\iint\limits_{\substack{x\geq \varepsilon,\ y\geq \varepsilon\\ x+y\leq 1}} x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy=\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{p-1}\,dx\int_\varepsilon^{1-x} y^{q-1}\,dy=$$

$$=\frac{1}{q}\left[\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^q\,dx-\varepsilon^q\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} x^{p-1}\,dx\right].$$

Если устремить теперь ε к 0 (сжимая ту полоску, заштрихованную на черт. 28, с помощью которой мы изолировали «особые» линии, то в пределе получим тоже $\frac{1}{q}\,\mathrm{B}(p,\ q+1)$. Этот предел и есть искомый несобственный интеграл.

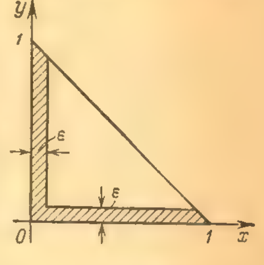
Замечание. И в общем случае, когда подинтегральная функция обращается в бесконечность в отдельных («особых») точках или вдоль некоторых («особых») линий, их выделяют с помощью тех или иных окрест-

*) Это ограничение мы устанавливаем здесь лишь для того, чтобы избегнуть обращения подинтегральной функции в бесконечность; ниже, в 4), оно будет ослаблено.

ностей, вычисляют интеграл по области, вне этих окрестностей, а затем переходят к пределу, сжимая упомянутые окрестности в точки или в линии. Если *конечный* предел оказывается существующим, то он и дает значение несобственного интеграла.

Подобным же образом строится и понятие «несобственного» интеграла, распространенного на бесконечную область: сначала рассматривается собственный интеграл, по ограниченной области, а затем эта область расширяется, охватывая постепенно все точки неограниченной области; с этим и связывается дополнительный предельный переход.

В случае положительной подинтегральной функции выбор сжимающихся окрестностей «особых» точек и линий или расширяющейся ограниченной области — безразличен.



Черт. 28.

345. Механические приложения. Все геометрические и механические величины, связанные *с плоским* непрерывным распределением масс вдоль некоторой фигуры (P) и *представляющие аддитивные функции области*, в принципе выражаются двойными интегралами распространенными на эту фигуру.

Здесь мы имеем в виду дать краткие указания относительно того, как обычно получают формулы подобного типа. Порядок идей здесь тот же, что и при применении простого определенного интеграла [п° 204].

Выделяя элементарную часть (dP) фигуры (P), делают упрощающее выкладки предположение, например, что масса всего элемента сосредоточена в одной точке или что плотность распределения масс в пределах элемента постоянна, которое позволяет дать для элемента dQ искомой величины Q приближенное выражение вида

$$dQ = q(M)\,dP,$$

верное до бесконечно малой порядка, высшего чем dP. Тогда *точное значение* Q выразится формулой

$$Q = \iint\limits_{(P)} q(M)\,dP.$$

Обосновать это можно, например, так [ср. п° 204]. Суммируя приближенные выражения для элементов dQ, можно получить приближенное же значение величины Q в виде интегральной суммы, а переходя к пределу — точное значение Q уже в виде предела суммы, т. е. интеграла.

Пусть массы непрерывным образом распределены по области (P), причем (поверхностная) плотность в точке $M(x, y)$ пусть будет

$$\rho(M) = \rho(x, y).$$

Легко сообразить, что *элемент массы* тогда будет

$$dm = \rho\,dP,$$

так что вся масса выразится интегралом

$$m = \iint\limits_{(P)} \rho\,dP. \qquad (10)$$

Далее, элементарные статические моменты и моменты инерции относительно осей координат будут

$$dK_x = y\,dm = y\rho\,dP, \quad dK_y = x\,dm = x\rho\,dP,$$
$$dI_x = y^2\,dm = y^2\rho\,dP, \quad dI_y = x^2\,dm = x^2\rho\,dP.$$

Отсюда для самих моментов сразу получаем:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \iint\limits_{(P)} y\rho\,dP, & K_y &= \iint\limits_{(P)} x\rho\,dP, \\ I_x &= \iint\limits_{(P)} y^2\rho\,dP, & I_y &= \iint\limits_{(P)} x^2\rho\,dP. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Теперь обычным образом получаются координаты центра тяжести фигуры:

$$\xi = \frac{\iint\limits_{(P)} x\rho\,dP}{m}, \quad \eta = \frac{\iint\limits_{(P)} y\rho\,dP}{m}. \tag{12}$$

В случае однородной фигуры, $\rho = \mathrm{const}$, эти формулы упрощаются:

$$\xi = \frac{\iint\limits_{(P)} x\,dP}{P}, \quad \eta = \frac{\iint\limits_{(P)} y\,dP}{P}. \tag{13}$$

В отдельных простых случаях удается с помощью двойных интегралов исчерпать подобные же вопросы по отношению к телам, например, к цилиндрическим брусам.

Пусть дан такой брус, ограниченный поверхностью $z = z(x, y)$, ее проекцией (P) на плоскость xy и проектирующим цилиндром, образующие которого параллельны оси z. Если, например, требуется определить статический момент K_{xy} однородного бруса (для простоты предположим объемную плотность равной единице), то мы представляем себе этот брус состоящим из ряда элементарных столбиков с основанием dP и высотой z. Статический момент столбика относительно плоскости xy равен его массе или — что в данном случае то же — объему $z\,dP$, умноженному на расстояние его центра тяжести от этой плоскости, т. е. на $\frac{1}{2}z$. Итак, элементарный статический момент есть

$$dK_{xy} = \frac{1}{2} z^2\,dP,$$

откуда, суммируя по всем столбикам, получаем

$$K_{xy} = \frac{1}{2} \iint\limits_{(P)} z^2\,dP. \tag{14}$$

Аналогично могут быть установлены и формулы

$$K_{zx} = \iint\limits_{(P)} yz\,dP, \quad K_{yz} = \iint\limits_{(P)} xz\,dP. \tag{14a}$$

Отсюда легко получить выражения для координат ξ, η, ζ центра тяжести бруса

$$\xi = \frac{K_{yz}}{V} = \frac{\iint\limits_{(P)} xz\, dP}{V}, \quad \text{и т. д.}$$

Точно так же выводятся и формулы для моментов инерции бруса I_z относительно оси z и I_{yz}, I_{zx} — относительно плоскостей координат yz, zx:

$$I_z = \iint\limits_{(P)} (x^2 + y^2)\, z\, dP, \quad I_{zx} = \iint\limits_{(P)} y^2 z\, dP, \quad I_{yz} = \iint\limits_{(P)} x^2 z\, dP, \tag{15}$$

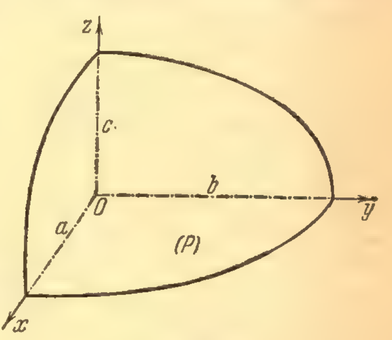
причем ясно, что $I_z = I_{zx} + I_{yz}$.

Если бы пространственная плотность ρ распределения масс зависела от z, двойного интеграла уже было бы недостаточно и пришлось бы обратиться к тройному интегралу [см. n°379].

Примеры. 1) Найти центр тяжести части однородного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,$$

содержащейся в первом октанте (чертеж 29).



Черт. 29.

Решение. Область (P) ограничена координатными осями и дугой эллипса

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$(0 \leqslant x \leqslant a)$; уравнение поверхности эллипсоида в явном виде будет

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

По формуле (14)

$$K_{xy} = \frac{1}{2}c^2 \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy =$$

$$= \frac{bc^2}{3a^3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{\pi}{16}abc^2.$$

Аналогично

$$K_{yz} = \frac{\pi}{16}a^2bc, \qquad K_{zx} = \frac{\pi}{16}ab^2c.$$

В то же время объем

$$V = \frac{\pi}{6}abc,$$

так что

$$\xi=\frac{3}{8}a,\quad \eta=\frac{3}{8}b,\quad \zeta=\frac{3}{8}c.$$

2) Найти моменты инерции однородного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

относительно координатных плоскостей.

Решение. Можно ограничиться одним октантом эллипсоида (черт. 29) с тем, чтобы результат умножить на 8. В таком случае областью (P) будет квадрант эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$

Имеем

$$I_{zx}=8\iint\limits_{(P)} y^2 z\,dP=\frac{8c}{a}\int\limits_0^b y^2\,dy\int\limits_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2}\,dx=$$

$$=2\pi ac\int\limits_0^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

Аналогично

$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc,\qquad I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

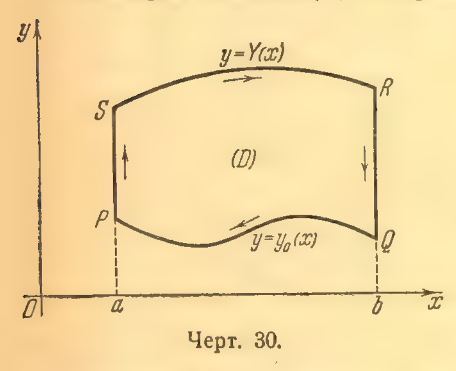
§ 3. ФОРМУЛА ГРИНА

346. Вывод формулы Грина. В настоящем номере мы установим важную формулу, связывающую двойной и криволинейный интегралы.

Рассмотрим область (D) — «криволинейную трапецию» (черт. 30), ограниченную контуром (L), состоящим из кривых

$$(PQ):\ y=y_0(x)$$
и $$(a\leqslant x\leqslant b)$$
$$(SR):\ y=Y(x)$$

и двух отрезков PS и QR, параллельных оси y.



Черт. 30.

Предположим, что в области (D) задана функция $P(x, y)$, непрерывная вместе со своей производной $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Вычислим теперь двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

по формуле (6) n° 344; мы получим

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy.$$

Внутренний интеграл здесь легко вычисляется с помощью первообразной функции $P(x, y)$, именно:

$$\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = P(x, y)\Bigg|_{y=y_0(x)}^{y=Y(y)} = P(x, Y(x)) - P(x, y_0(x)).$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_a^b P(x, Y(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x, y_0(x))\, dx;$$

каждый из этих двух интегралов может быть заменен теперь к р и в о л и н е й н ы м интегралом. В самом деле, вспоминая формулу (7) n° 331, видим, что

$$\int\limits_a^b P(x, Y(x))\, dx = \int\limits_{(SR)} P(x, y)\, dx,$$

$$\int\limits_a^b P(x, y_0(x))\, dx = \int\limits_{(PQ)} P(x, y)\, dx.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{(SR)} P(x, y)\, dx - \int\limits_{(PQ)} P(x, y)\, dx =$$
$$= \int\limits_{(SR)} P(x, y)\, dx + \int\limits_{(QP)} P(x, y)\, dx.$$

Желая ввести в рассмотрение интеграл по всему контуру (L) области (D), прибавим к правой части полученного равенства еще интегралы

$$\int\limits_{(PS)} P(x, y)\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{(RQ)} P(x, y)\, dx,$$

очевидно, равные нулю, ибо отрезки (PS) и (RQ) перпендикулярны к оси x [см. n° 331]. Мы получим

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{(PS)} P\, dx + \int\limits_{(SR)} P\, dx + \int\limits_{(RQ)} P\, dx + \int\limits_{(QP)} P\, dx.$$

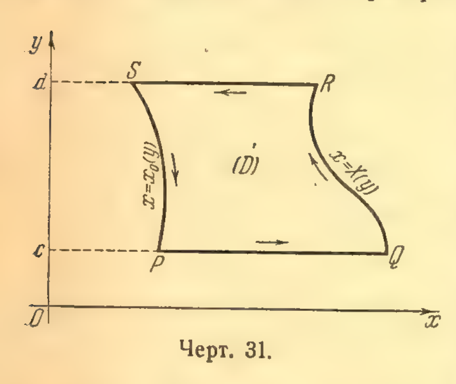
Правая часть этого равенства представляет собой интеграл, взятый по всему замкнутому контуру (L), ограничивающему область (D),

но в отрицательном направлении. В соответствии с соглашением, установленным нами насчет обозначения криволинейных интегралов по замкнутому контуру [n° 332], мы можем окончательно переписать полученную формулу так:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int\limits_{(L)} P(x, y)\, dx. \tag{1}$$

Хотя формула эта выведена в предположении правой ориентации осей, но, как легко убедиться, она сохраняется без изменения и при левой ориентации (лишь положительное направление обхода контура станет иным).

Мы предполагали до сих пор, что фигура (D) представляет собой «криволинейную трапецию» типа, изображенного на черт. 30, и справедливость формулы (1) доказана только для таких областей. На деле же она справедлива и для областей, ограниченных контурами более сложного вида, которые могут даже состоять из нескольких отдельных кривых. Достаточно предположить, что фигуру (D) прямыми, параллельными оси y, можно разложить на конечное число упомянутых «криволинейных трапеций» [см., например, черт. 26]. Написав для каждой из них в отдельности формулу вида (1), сложим почленно все такие равенства. Слева получится двойной интеграл, распространенный на всю область (D), а справа — сумма интегралов, взятых по всем частичным контурам. Эти последние, однако, приводятся к одному интегралу по общему контуру (L), ибо интегралы по каждому из вспомогательных отрезков равны нулю. Таким образом, и в этом случае формула (1) имеет место.



Черт. 31.

Аналогично устанавливается и формула

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{(L)} Q(x, y)\, dy \tag{2}$$

в предположении, что функция Q непрерывна в области (D) вместе со своей частной производной $\frac{\partial Q}{\partial x}$. При этом сначала за область (D) принимается криволинейная трапеция вида, изображенного на черт. 31. Она ограничена кривыми

$$(PS): x = x_0(y)$$

и

$$(c \leqslant y \leqslant d)$$

$$(QR): x = X(y).$$

и двумя отрезками (PQ) и (SR), параллельными оси x. Затем формула обобщается, как и выше, на случай области, которая разлагается прямыми, параллельными оси x, на конечное число криволинейных трапеций этого вида.

Наконец, если область (D) одновременно удовлетворяет условиям обоих случаев, т. е. разлагается как на конечное число трапеций первого типа, так и (независимо от этого) на конечное число трапеций второго типа, то для нее справедливы обе формулы (1) и (2), конечно, в предположении непрерывности функций P, Q и их производных $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Вычитая формулу (1) из (2), получаем

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{3}$$

Это и есть *формула Грина* *).

З а м е ч а н и е. Можно придать условиям, при которых справедлива формула (3), более обозримую форму. Именно, *формула Грина имеет место для любой области* (D), *ограниченной одним или несколькими кусочно-гладкими контурами.* Доказывать это мы не станем.

347. Выражение площади с помощью криволинейных интегралов. Ниже нам не раз будут встречаться применения формулы Грина; сейчас мы приведем простейшее из них — вычисление площади.

Если функции P и Q в формуле (3) подобрать так, чтобы выражение $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ оказалось равным единице, то двойной интеграл приведется к площади D фигуры (D), и мы получим выражение этой площади с помощью того или иного криволинейного интеграла, взятого по контуру (L) фигуры. Так, полагая $Q = x$, $P = 0$, найдем

$$D = \int_{(L)} x\,dy. \tag{4}$$

При $Q = 0$, $P = -y$ получим

$$D = -\int_{(L)} y\,dx. \tag{5}$$

Наиболее употребительной, однако, будет формула, отвечающая $Q = \frac{1}{2}x$, $P = -\frac{1}{2}y$:

$$D = \frac{1}{2}\int_{(L)} x\,dy - y\,dx. \tag{6}$$

*) Джордж Г р и н (1793—1841) — английский математик. На деле, однако, у Грина нет формулы (3), и с именем Грина ее связывают лишь ввиду аналогии с другими формулами, выведенными Грином для трехмерного случая. Формула (3) использовалась Гауссом и Риманом, но в частном виде встречалась и в работах по анализу еще в XVIII веке.

Примеры. 1) Найти площадь эллипса с полуосями a и b.

Воспользуемся параметрическими уравнениями эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. По формуле (6)

$$D = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt - b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

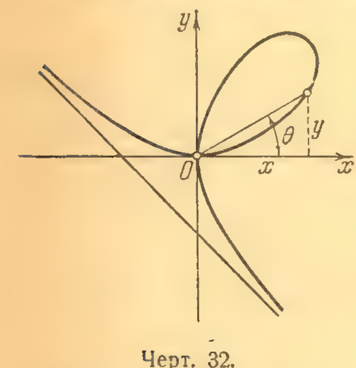
Для вычисления криволинейного интеграла мы применили формулу (6) n° 331; при расстановке пределов интегрирования было принято во внимание, что положительный обход контура отвечает возрастанию параметра.

2) Найти площадь петли декартова листа (черт. 32)

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Для получения параметрических уравнений контура положим $y = tx$ *) Тогда

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$



Черт. 32.

Из геометрических соображений ясно, что петля описывается при изменении параметра t от 0 до ∞ $\left(\text{ибо } t = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta, \text{ где } \theta \text{ изменяется от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем

$$dx = 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,dt, \quad dy = 3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}\,dt$$

и

$$D = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2.$$

Отметим, что здесь мы использовали несобственный интеграл с бесконечным пределом, в то время как при выводе формулы (6) n° 331 мы считали, что промежуток изменения параметра конечен. Оправдать сделанное легко, если предварительно ввести другой параметр с конечным промежутком изменения (например, угол θ), а затем уже перейти к параметру $t = \frac{y}{x}$.

§ 4. УСЛОВИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

348. Интеграл по простому замкнутому контуру. Формула Грина позволит нам легко исчерпать тот вопрос о криволинейных интегралах второго типа, который мы лишь вскользь затронули в § 2 главы XX [см., например, замечание в n° 333].

Пусть в некоторой связной области (E) заданы непрерывные

---

*) Такая подстановка оказывается удобной, как правило, в тех случаях, когда в уравнении алгебраической кривой имеются две однородные группы членов, причем степени этих групп различаются на единицу.

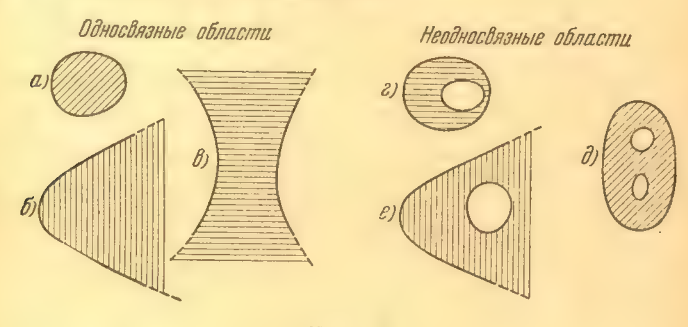
функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Рассмотрим сначала *вопрос об обращении в нуль интеграла*

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy$$

по любому, лежащему в (E), *простому замкнутому контуру* (L) *).

Имея в виду использование формулы Грина, мы нуждаемся в дополнительном предположении о существовании в (E) непрерывных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Но этого мало: нужно еще, чтобы *вместе с контуром* (L) *области* (E) *принадлежала всякий раз и область* (D), *ограниченная извне этим контуром*. Иными словами, область (E) не должна иметь «дырок», даже точечных. Связную область, обладающую этим свойством, называют *односвязной*.

Если речь идет о конечной области, т. е. не простирающейся в бесконечность, то понятие односвязности можно сформулировать еще проще: *область должна быть ограничена* *единственным* *замкнутым контуром*. На черт. 33 представлены примеры односвязных и неодносвязных областей, из них а), г), д) конечны, а б), в), е) простираются в бесконечность.



Черт. 33.

Теперь сформулируем фундаментальное утверждение:

Теорема 1. *Пусть в односвязной области* (E) *функции* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *определены и непрерывны вместе со своими производными* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$. *Для того чтобы имело место равенство*

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy = 0, \tag{1}$$

*) Все кривые, о которых идет речь в настоящем параграфе, предполагаются кусочно-гладкими.

каков бы ни был простой замкнутый контур (L) *в области* (E), *необходимо и достаточно, чтобы тождественно в* (E) *было*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{A}$$

Действительно, по формуле Грина, равенство (1) равносильно равенству

$$\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0. \tag{2}$$

Достаточность условия (А) для его выполнения — очевидна. Чтобы доказать и необходимость, предположим, что равенство (2) всегда справедливо. Путем дифференцирования интеграла по области [n° 342], ввиду непрерывности подинтегральной функции, приходим к заключению, что в (E) тождественно

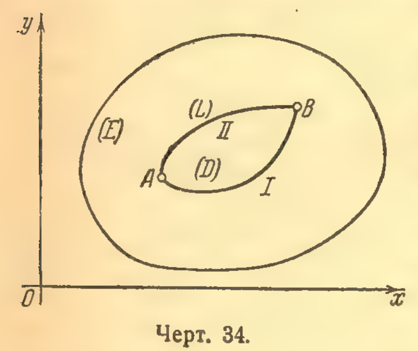
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0,\ \text{т. е.}\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

349. Интеграл по кривой, соединяющей две произвольные точки. Обратимся, наконец, к *вопросу об условиях, обеспечивающих независимость интеграла*

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx+Q\,dy, \tag{3}$$

взятого по кривой (AB), *соединяющей две точки* A *и* B *области* (E), *от формы этой кривой.* И здесь решающую роль будет играть условие (А).

Теорема 2. *При прежних предположениях, для того, чтобы интеграл* (3) *не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно выполнение условия* (А)*).



Черт. 34.

Необходимость. Допустим, что интеграл (3) не зависит от пути, и возьмем в (E) произвольный простой замкнутый контур (L) (черт. 34). Если A и B — две его точки, то, по допущению,

$$\int\limits_{(AIB)}=\int\limits_{(AIIB)}, \tag{4}$$

откуда

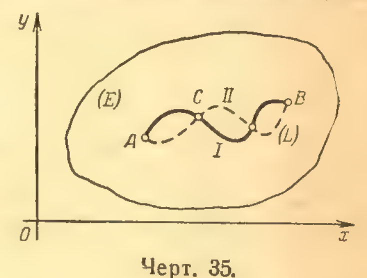
$$\int\limits_{(L)}=\int\limits_{(AIB)}+\int\limits_{(BIIA)}=0. \tag{5}$$

Следовательно, по теореме 1, необходимо выполняется (А).

---

*) Читатель легко проверит, что в примерах 1) и 4) n° 333 условие (А) выполнено, а в примерах 2), 3) и 5) — нет.

Достаточность. Предположим теперь, что равенство (A) имеет место в (E). Нужно доказать, что, если соединить любые точки A, B этой области двумя простыми кривыми (AIB) и $(AIIB)$, то всегда будет справедливо равенство (4). Это сделать легко, если названные кривые, кроме A и B, общих точек не имеют, ибо тогда контур $(L) = (AIBIIA)$ будет простым, так что, по теореме 1, выполнится (5), а из него, обратно, следует (4).



Черт. 35.

Если кривые (AIB) и $(AIIB)$ пересекаются в конечном числе точек, то контур (L) уже не будет простым: в упомянутых точках он сам себя пересекает (черт. 35). Исходя из точки A и следуя направлению кривой (L), опишем ее часть до первого самопересечения — в точке C. Отбросив получившуюся замкнутую кривую (L_1), продолжим путь до нового самопересечения, что позволит выделить еще одну замкнутую кривую (L_2), и т. д. После конечного числа шагов кривая (L) окажется распавшейся на конечное число простых (непересекающих себя) замкнутых кривых

$$(L_1),\ (L_2),\ \ldots$$

вдоль по которым интеграл заведомо нуль. Значит, он равен нулю и вдоль всей кривой (L), а отсюда снова вытекает (4).

Но кривые (AIB) и $(AIIB)$, вообще, могут пересекаться даже бесконечное число раз, и в таком случае предыдущее рассуждение неприменимо. Чтобы преодолеть встретившуюся трудность, докажем следующую лемму о приближении криволинейного интеграла с помощью интеграла, взятого по ломаной.

Лемма. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в некоторой открытой области (E), а (L) — незамкнутая кусочно-гладкая кривая, содержащаяся в (E). Если вписать в (L) ломаную (Λ), то при стремлении к нулю длины наибольшего из ее звеньев имеем

$$\lim \int\limits_{(\Lambda)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy.$$

Достаточно ограничиться интегралами $\int\limits_{(\Lambda)} P\,dx$ и $\int\limits_{(L)} P\,dx$; для интегралов $\int\limits_{(\Lambda)} Q\,dy$ и $\int\limits_{(L)} Q\,dy$ рассуждения вполне аналогичны. Пусть вписанная в (L) ломаная (Λ) имеет вершины в точках

$$A \equiv A_0,\ A_1, \ldots,\ A_i,\ A_{i+1}, \ldots,\ A_n \equiv B;$$

обозначим через x_i, P_i значения x, P в точке A_i. Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, можно длины хорд $\overline{A_iA_{i+1}}$ представить себе настолько малыми,

чтобы: 1) колебание непрерывной функции P вдоль звена $\overline{A_iA_{i+1}}$ было меньше ε и 2) интегральная сумма $\sum_i P_i\,\Delta x_i$ отличалась от своего предела $\int\limits_{(L)} P\,dx$ тоже меньше, чем на ε.

Имеем, очевидно,

$$\int\limits_{(\Lambda)} P\,dx = \sum_i \int\limits_{(A_iA_{i+1})} P\,dx$$

и, с другой стороны,

$$\sum_i P_i\,\Delta x_i = \sum_i \int\limits_{(A_iA_{i+1})} P_i\,dx,$$

так что

$$\int\limits_{(\Lambda)} P\,dx = \sum_i P_i\,\Delta x_i + \sum_i \int\limits_{(A_iA_{i+1})} [P - P_i]\,dx.$$

Но первое слагаемое справа разнится от интеграла $\int\limits_{(L)} P\,dx$ меньше, чем на ε [см. 2)], а второе по абсолютной величине не превосходит $\varepsilon \sum_i \overline{A_iA_{i+1}}$ [см. 1)], т. е. и подавно меньше $L\cdot\varepsilon$, где L — длина кривой (L).

Итак, окончательно,

$$\left|\int\limits_{(\Lambda)} P\,dx - \int\limits_{(L)} P\,dx\right| < \varepsilon(1+L),$$

что и доказывает наше утверждение.

Вернемся теперь к прерванному доказательству достаточности. Впишем в кривые (AIB) и $(AIIB)$, соответственно, ломаные (Λ_I) и (Λ_{II}); они могут пересекаться разве лишь в конечном числе точек, а тогда — как уже доказано — будем иметь

$$\int\limits_{(\Lambda_I)} = \int\limits_{(\Lambda_{II})}.$$

Остается лишь перейти в этом равенстве к пределам, считая все звенья обеих ломаных стремящимися к нулю, чтобы вновь установить равенство (4).

350. Связь с вопросом о точном дифференциале. Дифференциальное выражение

$$P\,dx + Q\,dy \tag{6}$$

напоминает выражение для (полного) дифференциала функции $F(x, y)$ от двух переменных [n° 142]

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

которое отождествляется с (2), если положить

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=Q. \tag{7}$$

Однако далеко не каждое выражение вида (2) есть «точный дифференциал», т. е. не каждое такое выражение имеет «первообразную функцию» $F(x, y)$, для которой именно это выражение и служит (полным) дифференциалом. При решении вопроса о том, будет ли выражение (7) точным дифференциалом или нет, мы снова сталкиваемся с тем же условием (А):

Теорема 3. *При прежних предположениях, для того, чтобы выражение* (6) *было точным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия* (А).

Необходимость ясна непосредственно: если выражение (6) есть (полный) дифференциал некоторой функции $F(x, y)$, так что имеют место равенства (7), то

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

и остается лишь сослаться на теорему n° **147** о смешанных производных (с учетом предположенной их непрерывности!).

Перейдем к доказательству достаточности. Мы уже знаем, что при выполнении условия (А) интеграл (3) оказывается независящим от пути интегрирования (по теореме 2). В этом случае интеграл однозначно определяется заданием точек $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, в связи с чем его можно обозначить символом

$$\int_A^B P\,dx+Q\,dy \text{ или } \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx+Q\,dy.$$

Здесь указаны только начало и конец пути интегрирования; сам путь не указан, но он безразличен — можно интегрировать по любому.

Если точку $A(x_0, y_0)$ фиксировать, а точку B заменить произвольной точкой $M(x, y)$ области (E), то полученный интеграл представит собой некоторую функцию от точки M, т. е. от ее координат x, y, в области (E):

$$F(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx+Q\,dy. \tag{8}$$

Покажем, что эта именно функция и будет первообразной для выражения (2), и с этой целью займемся вопросом об ее частных производных как по x, так и по y.

Взяв произвольную точку $B(x_1, y_1)$ в области (E), придадим x_1 приращение Δx и перейдем к точке $C(x_1+\Delta x, y_1)$, которая при

достаточно малом Δx будет также принадлежать (E) вместе со всем отрезком BC (черт. 36). Соответствующие значения функции будут

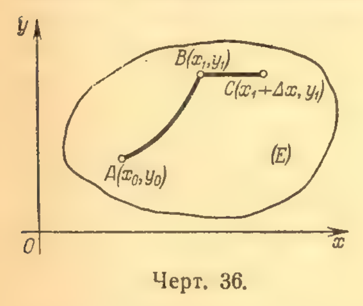
$$F(x_1, y_1) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy,$$

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P\,dx + Q\,dy.$$

Первый из этих интегралов мы возьмем по произвольной кривой (K), соединяющей точки A и B, а для второго интеграла путь интегрирования составим из этой же кривой и из прямолинейного отрезка BC. Таким образом, приращение функции F будет

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = \\ = \int\limits_{(BC)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(BC)} P(x, y)\,dx;$$

интеграл, содержащий $Q\,dy$, обращается в нуль, так как отрезок BC перпендикулярен к оси y.



Черт. 36.

Оставшийся интеграл непосредственно приводится к обыкновенному определенному интегралу: для этого в подинтегральной функции нужно заменить y на y_1 (из уравнения $y = y_1$ прямой BC) и в качестве пределов интегрирования по x взять абсциссы точек B и C. Окончательно

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = (\mathrm{R}) \int\limits_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y_1)\,dx.$$

Применяя к полученному обыкновенному интегралу теорему о среднем и деля обе части равенства на Δx, найдем

$$\frac{F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(x_1 + \theta\,\Delta x, y_1) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Устремим теперь Δx к нулю. В силу непрерывности функции $P(x, y)$ правая часть равенства, а с нею и левая, стремится к $P(x_1, y_1)$. Следовательно, в точке (x_1, y_1) частная производная функции F по x существует и выражается равенством

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1).$$

Аналогично устанавливается и формула

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q(x_1, y_1).$$

Так как точка (x_1, y_1) была взята произвольно внутри области (E), то для всех точек этой области будут выполняться соотношения (7)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Поскольку эти частные производные непрерывны, *функция* $F(x, y)$ *имеет дифференциал* [n° 142]:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Из сопоставления теорем 1, 2 и 3 можно вывести теперь и такое

Следствие. *При сделанных предположениях, для того чтобы интеграл* (3) *не зависел от пути (а интеграл по замкнутому контуру равнялся нулю), необходимо и достаточно, чтобы подинтегральное выражение* (6) *было точным дифференциалом.*

При доказательстве теоремы 3, мы установили для криволинейного интеграла (8), не зависящего от пути, результат, вполне аналогичный теореме о дифференцировании обыкновенного определенного интеграла по переменному верхнему пределу [n° 183, 12°].

Предположим теперь, что нам известна какая-либо первообразная функция $\Phi(x, y)$ для подинтегрального выражения (6), так что — наряду с соотношениями (7), которые имеют место для функции (8), — будет также

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q;$$

тогда разность

$$F(x, y) - \Phi(x, y) = C = \text{const}$$

(ведь ее частные производные как по x, так и по y тождественно равны нулю!). Полагая $x = x_0$, $y = y_0$, получим, что $C = -\Phi(x_0, y_0)$, так что

$$F(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi(x_0, y_0).$$

Если, наконец, взять здесь $x = x_1$, $y = y_1$, то придем к формуле

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_0, y_0) = \Phi(x, y)\Bigg|_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} \tag{9}$$

или, короче,

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(M)\Bigg|_A^B. \tag{9a}$$

Эта формула вполне аналогична основной формуле интегрального исчисления [n° 185], выражающей обыкновенный определенный интеграл через

первообразную. Подчеркнем, однако, еще раз, что она приложима лишь к криволинейным интегралам, не зависящим от пути.

Замечание. Характеристика точного дифференциала условием (А) восходит к Эйлеру и Клеро (1740 г.).

Криволинейный интеграл (без этого термина) от дифференциального выражения (6) также впервые встречается в сочинении Клеро «Теория фигуры земли. . .» (1743 г.)*). Предполагая, что форма кривой задана в виде уравнения между x и y, Клеро исключает с его помощью из (6) y и dy, а затем интегрирует получающееся выражение, содержащее лишь x и dx. Там же Клеро указывает условие независимости интеграла от вида кривой: *выражение* (6) *должно быть полным дифференциалом*, а для этого, в свою очередь, *должно выполняться условие* (А).

351. Приложения к физическим задачам. Вернемся в свете изложенной теории к ранее рассмотренным [n° 335] задачам из области механики и физики.

1) *Работа силового поля.* Мы видели, что работа силового поля при перемещении материальной точки с массой 1 из положения A в положение B выражается криволинейным интегралом [см. n° 335, (12)]:

$$A = \int\limits_{(AB)} X\,dx + Y\,dy, \tag{10}$$

где $X = X(x, y)$ и $Y = Y(x, y)$ суть проекции напряжения поля на координатные оси, а (AB) означает траекторию материальной точки.

Весьма естественно заняться выяснением условий, при которых работа сил поля зависит лишь от начального и конечного положения точки, но не от формы траектории. Этот вопрос, очевидно, равносилен вопросу о независимости значения криволинейного интеграла (10) от пути интегрирования. Поэтому искомым условием является равенство

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \tag{11}$$

в предположении, конечно, что область, охватываемая полем, односвязна и что для функций X, Y и их производных нигде не нарушается непрерывность.

То же условие можно выразить и в такой форме: *работа сил поля при перемещении материальной точки из одного положения в другое не зависит от формы траектории в том и только в том случае, когда элементарная работа*

$$X\,dx + Y\,dy$$

служит (полным) дифференциалом от некоторой функции $U(x, y)$. Эту функцию обычно называют *силовой* или *потенциальной;* в случае ее существования само поле получает наименование *потенциального.*

Работа потенциального поля при перемещении точки из положения $A(x_0, y_0)$ в положение $B(x_1, y_1)$ равна [см. n° 350, (9)] просто соответствующему приращению силовой функции:

$$U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0) = U(B) - U(A). \tag{12}$$

В качестве примера рассмотрим поле ньютоновского притяжения. Если в начале координат O поместить массу μ, а в точку A — массу 1, то эта последняя будет притягиваться к центру O с силой $\overline{F}$, равной по величине

$$F = \frac{\mu}{r^2},$$

---

*) Есть русский перевод (изд. Академии наук СССР, 1947); см. стр. 43.

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$ есть расстояние точки A от начала *). Так как косинусы углов, составляемых этой силой с осями, будут, соответственно, $-\frac{x}{r}$ и $-\frac{y}{r}$, то проекции силы $\overrightarrow{F}$ на оси выразятся так:

$$X=-\frac{\mu x}{r^3}, \qquad Y=-\frac{\mu y}{r^3}.$$

Непосредственно ясно, что ньютоновское поле является потенциальным, поскольку выражение

$$-\frac{\mu x}{r^3}\,dx-\frac{\mu y}{r^3}\,dy \tag{13}$$

служит дифференциалом для функции

$$U=\frac{\mu}{r},$$

которая и играет здесь роль потенциальной функции; ее называют *ньютоновским потенциалом* (поля точки O). Несмотря на наличие «особой» точки в начале координат — там функции X, Y терпят разрыв, интеграл от выражения (13) по замкнутому контуру будет нулем, даже если контур охватывает начало.

При перемещении точки из положения A в положение B силы поля произведут работу [см. (12)]

$$A=\frac{\mu}{r_B}-\frac{\mu}{r_A},$$

где r_A и r_B суть расстояния точек A и B от центра.

2) *Плоское установившееся течение несжимаемой жидкости.* Если через u, v обозначить слагающие по осям вектора-скорости, то, как мы вывели в n° 335, 2), количество жидкости, втекающей в единицу времени через замкнутый контур (K) внутрь, равно

$$Q=\int\limits_{(K)} v\,dx-u\,dy$$

[см. n° 335, (14)]. При отсутствии источников и стоков этот интеграл всегда будет нулем. Отсюда следует, что слагающие u, v вектора-скорости необходимо подчинены условию

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Тогда подинтегральное выражение $v\,dx-u\,dy$ имеет первообразную функцию $\varphi(M)=\varphi(x, y)$, которую в гидромеханике называют *функцией тока*.

Если взять любую кривую (AB), соединяющую точки A и B, то, как известно [n° 335, (14)], количество жидкости, протекающей через нее в единицу времени в определенную сторону, выражается интегралом

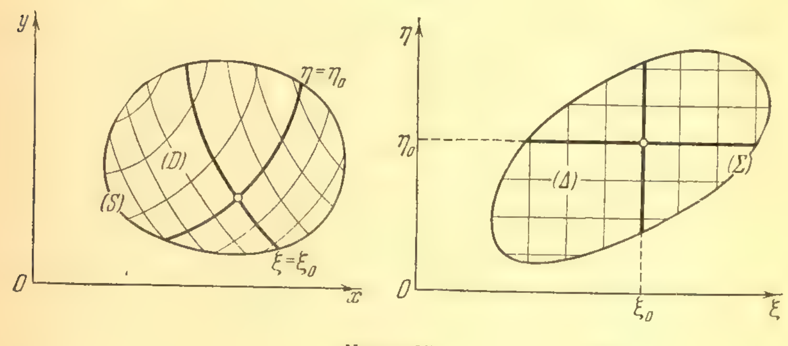
$$Q=\int\limits_{(AB)} v\,dx-u\,dy,$$

*) Таково же и *электростатическое поле кулоновского притяжения*, созданное зарядом μ, помещенным в начале (если учитывать действие поля на заряженную частицу).

причем направление на кривой (AB) должно быть таким, чтобы нормаль, направленная в упомянутую сторону, составляла с положительно направленной касательной угол $+\frac{\pi}{2}$. Теперь мы видим, что эта величина попросту равна разности $\varphi(B)-\varphi(A)$ значений функции тока на концах кривой!

§ 5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

352. Преобразование плоских областей. Предположим, что нам даны две плоскости, отнесенные одна — к прямоугольным осям x и y, а другая — к таким же осям ξ и η. Рассмотрим в этих



Черт. 37.

плоскостях две ограниченные замкнутые области: область (D) на плоскости xy и область (Δ) на плоскости $\xi\eta$.

Контур или границу каждой из этих областей мы будем предполагать простой кусочно-гладкой кривой; обозначим его символом (S) для области (D) и символом (Σ) для области (Δ) (черт. 37).

Допустим, что в области (Δ) дана система непрерывных функций:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(\xi,\ \eta),\\ y&=y(\xi,\ \eta), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которая каждой точке $(\xi,\ \eta)$ области (Δ) относит одну определенную точку $(x,\ y)$ области (D), причем ни одна точка $(x,\ y)$ из (D) не будет пропущена, так что каждая такая точка отнесена хоть одной точке $(\xi,\ \eta)$ из (Δ).

Если различным точкам $(\xi,\ \eta)$ отвечают различные же точки $(x,\ y)$ (что мы впредь и будем предполагать), так что каждая точка $(x,\ y)$

отнесена лишь одной точке (ξ, η), то уравнения (1) *однозначно разрешимы относительно* ξ и η: переменные ξ, η, в свою очередь, являются однозначными функциями от x, y в области (D)

$$\left.\begin{aligned} \xi&=\xi(x, y), \\ \eta&=\eta(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Таким образом, между областями (D) и (Δ) устанавливается *взаимно однозначное* или *одно-однозначное* соответствие. Говорят также, что формулы (1) осуществляют *преобразование области* (Δ) *в область* (D), а формулы (1а) дают *обратное преобразование области* (D) *в область* (Δ).

Подчеркнем, что при этом, необходимо, *точкам контура* (Σ) *отвечают именно точки контура* (S), и наоборот.

Предположим, далее, что функции (1) не только непрерывны, но и имеют в (Δ) непрерывные частные производные первого порядка.

Тогда и функциональный определитель

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \tag{2}$$

является непрерывной функцией от ξ, η в области (Δ). Будем считать, что *этот определитель всегда отличен от нуля*, а следовательно, — по непрерывности — *сохраняет постоянный знак.* Это предположение в последующем будет играть важную роль.

Если взять в области (Δ) простую кусочно-гладкую кривую (Λ), то с помощью преобразования (1) она перейдет в подобную же кривую (L) в области (D).

Действительно, пусть уравнения кривой (Λ) будут:

$$\xi=\xi(t), \quad \eta=\eta(t)$$
$$(\alpha \leqslant t \leqslant \beta \text{ или } \alpha \geqslant t \geqslant \beta), \tag{3}$$

причем (если ограничиться гладким куском кривой) можно считать, что функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ имеют непрерывные производные, не обращающиеся одновременно в нуль. Подставляя эти функции в формулы преобразования (1), мы получим параметрически уравнения соответствующей кривой (L):

$$x=x(\xi(t), \eta(t))=x(t),$$
$$y=y(\xi(t), \eta(t))=y(t). \tag{4}$$

Легко видеть, что эти функции также имеют непрерывные производные:

$$x'(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi}\xi'(t) + \frac{\partial x}{\partial \eta}\eta'(t),$$

$$y'(t) = \frac{\partial y}{\partial \xi}\xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta}\eta'(t), \tag{5}$$

которые тоже не могут одновременно обратиться в нуль, так что особых точек на кривой (L) нет.

Действительно, в противном случае, ввиду неравенства нулю определителя $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$, из (5) следовало бы, что одновременно $\xi' = 0$ и $\eta' = 0$, что противно предположению.

Если точка (ξ, η) на плоскости $\xi\eta$ описывает замкнутый контур (Λ), скажем, в положительном направлении, то соответствующая точка (x, y) опишет также некоторый замкнутый же контур (L) на плоскости xy, но *направление его может оказаться как положительным, так и отрицательным*. Вопрос этот зависит, как мы увидим ниже [n° **354**, 1°], от знака функционального определителя.

Задание пары значений переменных ξ и η из области (Δ) однозначно определяет некоторую точку в области (D) на плоскости xy, и обратно. Это дает основание и числа ξ, η называть *координатами точек области* (D).

Кривую, составленную из точек области (D), у которых одна из координат сохраняет постоянное значение, называют *координатной линией*.

Например, полагая, в (1) $\eta = \eta_0$, мы получим параметрическое представление координатной линии:

$$x = x(\xi, \eta_0),$$
$$y = y(\xi, \eta_0)$$

(роль параметра здесь играет ξ). Неявное уравнение той же линии получим, полагая $\eta = \eta_0$ во втором из уравнений (2):

$$\eta(x, y) = \eta_0.$$

В связи с тем, что координатные линии, вообще говоря, будут кривыми, числа ξ, η, характеризующие положение точки на плоскости xy, называют *криволинейными координатами точки*.

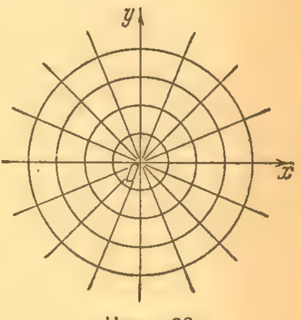
Придавая координате η различные (возможные для нее) постоянные значения, мы получим целое семейство координатных линий на плоскости xy. Фиксируя значение координаты ξ, мы получим другое семейство координатных линий. При наличии взаимно однозначного

соответствия между рассматриваемыми областями различные линии одного и того же семейства не пересекаются между собой, и через любую точку области (D) проходит по одной линии из каждого семейства.

Вся сетка координатных линий на плоскости xy является изображением сетки прямых $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ на плоскости $\xi\eta$ (черт. 37).

Примеры. 1) Простейшим и важнейшим примером криволинейных координат являются *полярные координаты* r, θ. Они имеют наглядное геометрическое истолкование, как полярный радиус-вектор и полярный угол, но могут быть введены и формально, с помощью известных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (r \geqslant 0)$$



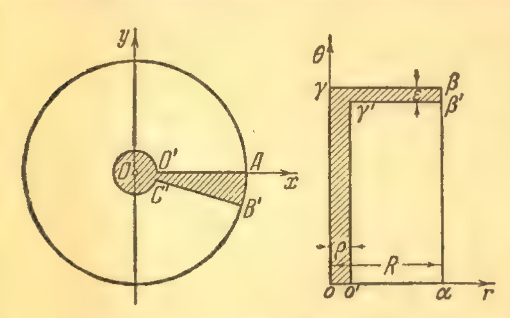
Черт. 38.

Если значения r и θ откладывать по двум взаимно перпендикулярным осям, считая, скажем, r — абсциссой, а θ — ординатой (при правой ориентации осей), то каждой точке полуплоскости $r \geqslant 0$ по указанным формулам отвечает одна определенная точка на плоскости xy.

Читателю наверно приходилось иметь дело с относящимися к этому случаю координатными линиями: прямым $r = \text{const}$ отвечают круги радиуса r с центром в начале, а прямым $\theta = \text{const}$ отвечают лучи, исходящие из начала под углом θ к оси x (черт. 38).

Однако в данном случае формулы преобразования, вообще, не будут однозначно разрешимы: изменение величины угла θ на $2k\pi$ (где k — целое) не отразится на значениях x и y. Для того чтобы получить все точки плоскости xy, достаточно ограничиться значениями

$$r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$



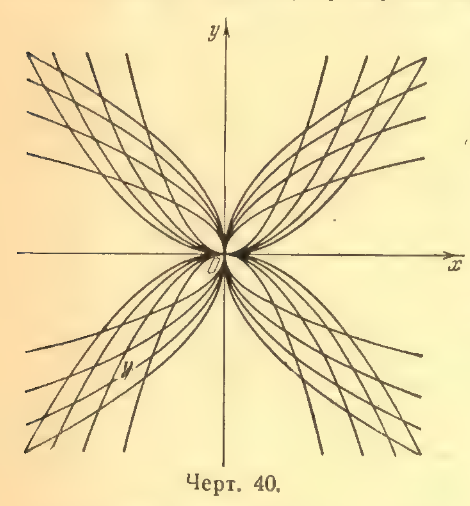
Черт. 39.

Каждой точке (x, y), отличной от начала, отвечает одно значение $r > 0$ и одно значение θ в указанных пределах. Но неустранимое нарушение однозначности соответствия связано с началом координат: точке $x = y = 0$ отвечает на плоскости $r\theta$ вся ось θ (или, если угодно, отрезок ее от $\theta = 0$ до $\theta = 2\pi$).

Рассмотрим на плоскости $r\theta$ замкнутый прямоугольник $[0, R; 0, 2\pi]$ или $o\alpha\beta\gamma$ (черт. 39); легко видеть, что на плоскости xy ему отвечает замкнутый круг, описанный вокруг начала O радиусом $R = OA$. Но весь контур этого круга отвечает одной лишь стороне $\alpha\beta$ упомянутого прямоугольника; сторонам $o\alpha$ и $\beta\gamma$ (обеим!) отвечает один и тот же радиус OA круга; наконец,

всей стороне $o\gamma$ отвечает лишь точка O. Здесь явно не соблюдены указанные в предыдущем номере условия!

Однако, если сдвинуть сторону $o\gamma$ на малую величину $\rho = oo'$, а сторону $\gamma\beta$ — на $\varepsilon = \beta\beta'$, то новому прямоугольнику $o'\alpha\beta'\gamma'$ будет отвечать на плоскости xy фигура $O'AB'C'$, полученная из круга удалением малого круга радиуса ρ и сектора с центральным углом ε, с соблюдением уже всех требований. При перемещении точки на плоскости $r\theta$ по отрезкам $\alpha\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'o'$, $o'\alpha$ соответствующая точка на плоскости xy опишет по порядку: неполную окружность AB' (радиуса R), отрезок $B'C'$, неполную окружность $C'O'$ (радиуса ρ) и отрезок $O'A$. Заметим попутно, что положительному обходу на плоскости $r\theta$ отвечает положительный же обход на плоскости xy.



Черт. 40.

Функциональный определитель в данном случае равен

$$\frac{D(x,\,y)}{D(r,\,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r;$$

он сохраняет (если исключить начало) положительный знак.

2) Иногда удобно наперед задаться с е т к о й к о о р д и н а т н ы х л и н и й и по ним установить систему криволинейных координат.

Рассмотрим, например, два семейства парабол (черт. 40):

$$y^2 = 2px \quad \text{и} \quad x^2 = 2qy;$$

каждое из них в отдельности заполняет всю плоскость xy (если исключить оси координат).

Естественно ввести $\xi = 2p$ и $\eta = 2q$ в качестве криволинейных координат. Из равенств $y^2 = \xi x$ и $x^2 = \eta y$ имеем

$$x = \sqrt[3]{\xi\eta^2}, \qquad y = \sqrt[3]{\xi^2\eta} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{y^2}{x}, \qquad \eta = \frac{x^2}{y} \qquad (x, y \neq 0).$$

Определитель здесь равен

$$\frac{D(x,\,y)}{D(\xi,\,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

353. Выражение площади в криволинейных координатах. Предположим, что на плоскости xy задана некоторая область (D), ограниченная простым кусочно-гладким контуром (S). Пусть формулы (1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между этой областью и областью (Δ) на плоскости $\xi\eta$, ограниченной подобным же контуром (Σ).

Мы сохраним все предположения n° **352** относительно этого преобразования областей и, сверх того, еще предположим, что существуют и непрерывны в области (Δ) смешанные производные второго порядка для какой-либо из функций (1), скажем:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\, \partial \eta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \eta\, \partial \xi}$$

(в силу непрерывности, они будут иметь равные значения, n° **147**) *).

При этих предположениях поставим себе задачей выразить площадь D рассматриваемой области на плоскости xy в виде двойного интеграла, распространенного на область Δ на плоскости $\xi\eta$.

Мы будем исходить из формулы, выражающей площадь D криволинейным интегралом, взятым по контуру (S) области (D)

$$D = \int_{(S)} x\, dy \tag{6}$$

[см. n° **347**, (4)].

План дальнейших преобразований таков: сначала мы перейдем, пользуясь параметрическими уравнениями контура, от криволинейного интеграла (6) к обыкновенному определенному интегралу. Затем преобразуем этот последний опять к криволинейному интегралу, но взятому на этот раз уже по контуру (Σ) области (Δ). Наконец, пользуясь формулой Грина, заменим полученный криволинейный интеграл двойным интегралом по области (Δ).

Во исполнение этого плана нам нужны параметрические уравнения контура (S). Так как в дальнейшем мы имеем в виду перейти к контуру (Σ), то и сейчас мы предпочитаем исходить именно из уравнений этого контура. Пусть (3) дает параметрическое представление кривой (Σ); тогда (4) даст, очевидно, такое же представление для кривой (S), поскольку [как следует из наших предположений, n° **352**] именно она соответствует на плоскости xy контуру (Σ). Пределы α и β изменения t мы выберем так, чтобы при переходе от α к β кривая (S) описывалась в *положительном* направлении; это всегда можно сделать.

Тогда, согласно формуле (5*) n° **331**,

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y'(t)\, dt$$

или, если принять во внимание (4) и (5),

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} x(\xi(t),\ \eta(t)) \left[\frac{\partial y}{\partial \xi}\, \xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta}\, \eta'(t)\right] dt. \tag{7}$$

---

*) Отметим здесь же, что эти дополнительные предположения несущественны для справедливости окончательного результата и введены лишь для облегчения доказательства.

Сопоставим этот интеграл с криволинейным интегралом

$$\int\limits_{(\Sigma)} x(\xi, \eta)\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta\right), \tag{8}$$

взятым по контуру (Σ) в положительном направлении. Если пожелать свести последний по обычному правилу к обыкновенному определенному интегралу, то пришлось бы подставлять сюда вместо ξ и η функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ из параметрических уравнений кривой (Σ), и мы вернулись бы к интегралу (7).

Впрочем, нужно иметь в виду еще одно обстоятельство. При изменении t от α до β описывается в положительном направлении контур (S) — так мы выбрали эти пределы. Но контур (Σ) при этом может описываться как в положительном, так и в отрицательном направлении; таким образом, интегралы (7) и (8) могут на деле разниться знаками. Во всяком случае

$$D = \pm \int\limits_{(\Sigma)} x \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + x \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \tag{9}$$

причем (подчеркнем это еще раз) *знак плюс имеет место, если положительному обходу контура (S) отвечает положительный же обход контура (Σ), и знак минус — в противном случае.*

Остается, наконец, преобразовать полученный криволинейный интеграл в двойной. Для этого надлежит воспользоваться формулой Грина

$$\int\limits_{(\Sigma)} P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta,$$

где полагаем

$$P(\xi, \eta) = x \frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad Q(\xi, \eta) = x \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \eta\, \partial \xi},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \xi\, \partial \eta},$$

а смешанные производные второго порядка от y равны между собой, то

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)},$$

и мы приходим к формуле

$$D = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta.$$

Мы видели в n° **352**, что при сделанных предположениях определитель

$$J(\xi, \eta) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$$

сохраняет в области (Δ) определенный знак. Этот же знак имеет и интеграл. Но перед ним еще стоит двойной знак $\pm$; так как в результате должно получиться существенно положительное число D, то ясно, что *знак перед интегралом совпадает со знаком определителя.* Если ввести этот знак в подинтегральную функцию, то там получится, очевидно, абсолютная величина определителя, так что окончательное выражение для площади будет

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi\, d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta. \tag{10}$$

Это и есть та формула, которую мы желали установить.

Подинтегральное выражение

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi\, d\eta = |J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta$$

обычно называют *элементом площади в криволинейных координатах.* Мы видели, например, что в случае перехода к полярным координатам функциональный определитель равен r, следовательно, элемент площади в полярных координатах есть $r\, dr\, d\theta$.

354. Дополнительные замечания. 1°. Если сопоставить правило, по которому выбирался знак, плюс или минус, в формуле (9), с тем фактом, что этот знак необходимо совпадает со знаком функционального определителя, то получится интересное следствие: *если этот определитель сохраняет положительный знак, то положительные направления обхода контуров* (S) *и* (Σ) *соответствуют друг другу по формулам преобразования, если же определитель имеет отрицательный знак, то положительному направлению на одном контуре соответствует отрицательное направление на другом.*

Очевидно, это же имеет место и по отношению к любой паре взаимно соответствующих простых замкнутых контуров (L) и (Λ), лежащих в областях (S) и (Σ). Полученный результат легко проверяется на примерах, приведенных в n° **352**.

2°. Применяя к формуле (10) теорему о среднем [n° **341**, **(9)**], получим соотношение

$$D = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta})| \cdot \Delta, \tag{11}$$

где ($\bar{\xi}, \bar{\eta}$) есть некоторая точка из области (Δ), а Δ — площадь этой области.

Сопоставим это соотношение с формулой Лагранжа

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\bar{\xi})(\beta - \alpha) \quad (\alpha < \bar{\xi} < \beta).$$

Если $x=f(\xi)$ есть монотонная функция, то она взаимно однозначно связывает промежуток $\alpha\leqslant\xi\leqslant\beta$ с промежутком $f(\alpha)\leqslant x\leqslant f(\beta)$ (или $f(\beta)\leqslant x\leqslant f(\alpha)$, если $f(x)$ — убывающая функция). Обозначим длины этих промежутков через δ и d; тогда формула Лагранжа приводит к равенству

$$d=|f'(\bar{\xi})|\cdot\delta, \tag{12}$$

сходному с равенством (11).

Если в формуле (12) «сжимать» промежуток $[\alpha, \beta]$ в точку ξ, то в результате получим соотношение

$$|f'(\xi)|=\lim\frac{d}{\delta},$$

так что абсолютная величина производной является как бы *коэффициентом растяжения* прямой ξ (в данной ее точке) при преобразовании ее в прямую x.

Точно так же из формулы (11) путем «сжатия» области (Δ) в точку (ξ, η) получаем

$$|J(\xi, \eta)|=\lim\frac{D}{\Delta}\,^{*)},$$

так что абсолютная величина функционального определителя играет роль *коэффициента растяжения* плоскости $\xi\eta$ (в данной ее точке) при преобразовании ее в плоскость xy.

Это замечание подчеркивает еще раз глубокую аналогию между производной и функциональным определителем [ср. главу XIX].

3°. Формула (10) показывает, что при безграничном уменьшении площади Δ также безгранично уменьшается и соответствующая ей площадь D. Отсюда уже легко установить, что преобразование областей, изученное в n° **352**, обладает и следующим важным свойством: *кривую* (Λ) *с площадью, равной нулю, в области* (Δ) *оно переводит в некоторую кривую* (L) *в области* (D), *также имеющую нулевую площадь*.

4°. Формула (10) выведена в предположении взаимно однозначного соответствия между областями (D) и (Δ), непрерывности функций (1) и их частных производных, а также сохранения знака определителем (2). Однако на практике обычно приходится сталкиваться со случаями, когда эти предположения нарушаются в отдельных точках или вдоль отдельных кривых.

Если упомянутые точки и кривые на обеих плоскостях могут быть заключены в произвольно малые по площади области (d) и (δ), то по выделении их формула уже становится применимой:

$$D-d=\iint\limits_{(\Delta)-(\delta)}|J(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta. \tag{10a}$$

---

*) По сути дела мы дифференцируем интеграл (10) по области в точке (ξ, η) [n° **342**].

Пусть функциональный определитель в области (Δ) сохраняет ограниченность:

$$|J(\xi, \eta)| \leqslant M;$$

тогда интеграл (10а) разнится от интеграла (10) на величину

$$\iint\limits_{(\delta)} |J(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta \leqslant M\delta.$$

Переходя в (10а) к пределу при d и $\delta \to 0$, восстановим формулу (10).

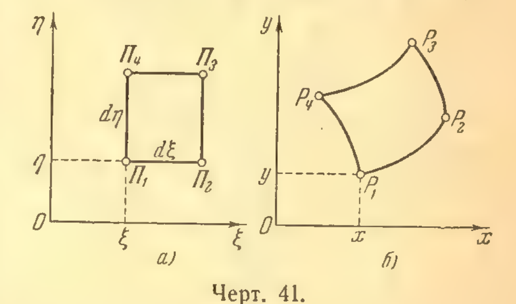
Для иллюстрации вернемся к примеру 1) в n° **352** и к фигурам, изображенным на черт. 39. Непосредственно к прямоугольнику $\Delta = [0, R; 0, 2\pi]$ и к кругу (D) радиуса R (с центром в начале) формулу (10), которая для этого случая принимает вид

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} r\, dr\, d\theta,$$

применить нельзя. Но если выключить заштрихованные области (площади которых вместе с ρ и ε стремятся к нулю), то к получающимся областям эту формулу применить можно; остается перейти к пределу.

355. Геометрический вывод. Формула (10) выведена нами с помощью, хотя и простых, но *не наглядных* рассуждений. Мы приведем другой вывод этой формулы, совершенно прозрачный с геометрической стороны; он принадлежит Остроградскому [см. ниже n° **359**].

Рассмотрим снова преобразование плоскости $\xi\eta$ в плоскость xy, которое задается формулами (1). Выделим на плоскости $\xi\eta$ бесконечно малый прямоугольник $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$ со сторонами $d\xi$ и $d\eta$, параллельными осям ξ и η (черт. 41*а*). Изображением этого прямоугольника в плоскости xy служит *криволинейный* четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ (черт. 41*б*); определим его площадь.



Черт. 41.

Вершины прямоугольника на плоскости $\xi\eta$ имеют координаты

$$\Pi_1(\xi, \eta), \quad \Pi_2(\xi + d\xi, \eta), \quad \Pi_3(\xi + d\xi, \eta + d\eta), \quad \Pi_4(\xi, \eta + d\eta);$$

в таком случае соответствующие вершины криволинейного четырехугольника будут иметь такие координаты:

$$\begin{aligned}
&P_1(x(\xi,\ \eta),\quad y(\xi,\ \eta)),\\
&P_2(x(\xi+d\xi,\ \eta),\quad y(\xi+d\xi,\ \eta)),\\
&P_3(x(\xi+d\xi,\ \eta+d\eta),\quad y(\xi+d\xi,\ \eta+d\eta)),\\
&P_4(x(\xi,\ \eta+d\eta),\quad y(\xi,\ \eta+d\eta)).
\end{aligned}$$

Если ограничиться членами первого порядка относительно $d\xi$, $d\eta$, то приближенно можно взять точки:

$$P_1(x,\ y),\quad P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi,\quad y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\right),$$

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\quad y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right)$$

$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\quad y+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\right),$$

где $x=x(\xi,\ \eta)$, $y=y(\xi,\ \eta)$ и, вообще, все производные вычислены в точке $(\xi,\ \eta)$. Так как проекции отрезков P_1P_2 и P_3P_4 на обе оси соответственно равны, то отрезки эти равны и параллельны, так что с точностью до малых высшего порядка четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ есть параллелограмм.

Его площадь равна удвоенной площади треугольника $P_1P_2P_3$. Из аналитической же геометрии известно, что удвоенная площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ $(x_3,\ y_3)$, равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1, & x_3-x_2\\ y_2-y_1, & y_3-y_2\end{vmatrix}.$$

Применяя эту формулу к нашему случаю, получим, что искомая площадь (снова — с точностью до малых высшего порядка) равна абсолютной величине определителя

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta\\ \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\end{vmatrix}=\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}d\xi\, d\eta.$$

Итак

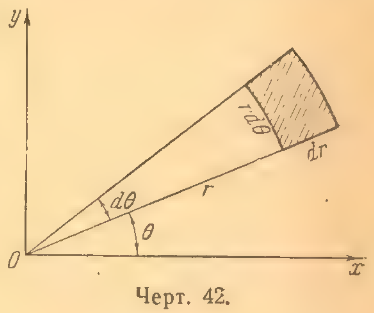
$$\text{площ. } P_1P_2P_3P_4 \doteq \left|\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)}\right| d\xi\, d\eta.$$

Разлагая фигуру (Δ) на плоскости $\xi\eta$ прямыми, параллельными осям, на бесконечно малые прямоугольники (и пренебрегая «неправильными» элементами у контура), мы одновременно разложим и фигуру (D) на плоскости xy на криволинейные че-

тырехугольники рассмотренного вида. Суммируя полученные выражения для площадей их, вновь приходим к формуле (10) *).

Приведенное рассуждение Остроградского, таким образом, подчеркивает важную геометрическую идею: *сущность формулы* (10) *состоит в том, что для определения площади фигуры* (D) *эта фигура разлагается не на традиционные прямоугольные элементы, с помощью сетки прямых, параллельных осям, а на криволинейные элементы, с помощью сетки координатных линий.*

В некоторых простых случаях можно непосредственно находить выражение «элемента площади» в криволинейных координатах почти без вычислений.



Черт. 42.

Например, в случае перехода к полярным координатам можно рассуждать так. Элементарному прямоугольнику со сторонами dr и $d\theta$ в плоскости $r\theta$ на плоскости xy отвечает фигура, ограниченная дугами окружностей радиусов r и $r+dr$ и двумя лучами, исходящими из начала под углами θ и $\theta+d\theta$ к оси x (черт. 42). Принимая приближенно эту фигуру за прямоугольник со сторонами dr и $r\,d\theta$, сразу получаем искомое выражение $r\,dr\,d\theta$ элемента площади.

356. Замена переменных в двойных интегралах. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{13}$$

где область (D) ограничена простым кусочно-гладким контуром (S), а функция $f(x, y)$ непрерывна в этой области.

Предположим теперь, что область (D) связана формулами (1):

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

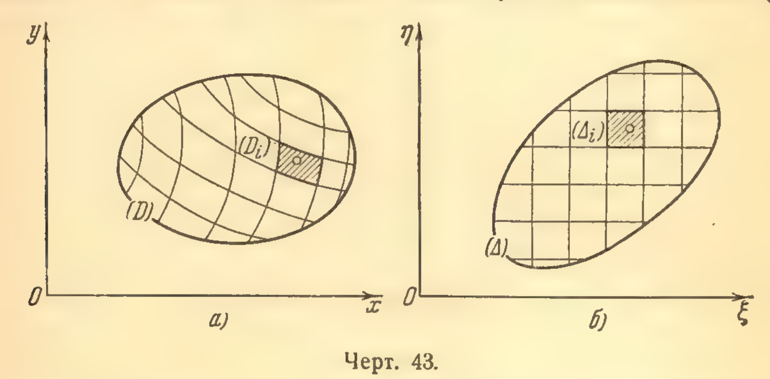
с некоторой областью (Δ) на плоскости $\xi\eta$ с соблюдением всех условий, при которых мы выводили в n° 353 формулу (10), выражающую площадь фигуры (D) в криволинейных координатах **). Поставим себе целью, заменяя переменные в интеграле (13), представить его в виде интеграла, распространенного на область (Δ).

---

*) Нетрудно сделать этот вывод и совершенно строгим.

**) Мы предполагаем, таким образом, также существование и непрерывность смешанных производных второго порядка $\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\,\partial\xi}$. Ср. сноску на стр. 279.

Для этого разобьем область (Δ) с помощью некоторой сетки кусочно-гладких кривых на части (Δ_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$; тогда область (D) соответствующими (тоже кусочно-гладкими) кривыми разобьется на части (D_i) (черт. 43, *а, б*). В каждой части (D_i)



Черт. 43.

выберем произвольно по точке (x_i, y_i); наконец, составим интегральную сумму для интеграла (13):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i,$$

которая имеет этот интеграл своим пределом при стремлении наибольшего из диаметров областей (D_i) к нулю.

Применив к каждой части (D_i) формулу (11) [n° 354], будем иметь

$$D_i = |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)| \cdot \Delta_i,$$

где $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$ есть некоторая определенная точка области (Δ_i). Заменяя в сумме σ каждое D_i этим выражением, получим

$$\sigma = \sum_i f(x_i, y_i) |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)| \Delta_i.$$

В то время как точка $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$ дается теоремой о среднем и в ее выборе мы не вольны, точка (x_i, y_i) берется в области (D_i) совершенно произвольно. Пользуясь этим произволом, положим

$$x_i = x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i), \quad y_i = y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i),$$

т. е. выберем в качестве точки (x_i, y_i) ту точку области (D_i), которая отвечает точке $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)$ области (Δ_i). Тогда сумма σ примет вид

$$\sigma = \sum_i f(x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i), y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)) |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i)| \Delta_i;$$

в этом виде она, очевидно, является интегральной суммой для интеграла

$$\iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \, |J(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta \tag{14}$$

Существование этого интеграла вытекает из того, что подинтегральная функция непрерывна.

Если заставить теперь диаметры всех областей (Δ_i) стремиться к нулю, то по непрерывности функций (1) и диаметры всех областей (D_i) также будут стремиться к нулю. Тогда сумма σ должна стремиться как к интегралу (13), так и к интегралу (14), ибо для обоих одновременно служит интегральной суммой. Таким образом,

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y) \, dx \, dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \, |J(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta. \tag{15}$$

Эта формула и решает поставленную задачу — о замене переменных в двойном интеграле. Формула (10), очевидно, является ее частным случаем и получается отсюда при $f(x, y) \equiv 1$.

Итак, *для того, чтобы осуществить замену переменных в двойном интеграле* (13), *нужно не только подставить в функцию* f *вместо* x *и* y *их выражения* (1), *но и заменить элемент площади* $dx\,dy$ *его выражением в криволинейных координатах.*

С помощью соображений, аналогичных приведенным в n° **354**, 4°, и здесь легко установить, что формула (15) сохраняет справедливость в ряде случаев, когда условия, наложенные на преобразование (1), нарушаются в отдельных точках или вдоль отдельных линий.

357. Аналогия с простым интегралом. Интеграл по ориентированной области. Формула замены переменных в двойном интеграле весьма сходна с формулой замены переменной в простом определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(x(\xi)) \, x'(\xi) \, d\xi. \tag{16}$$

Однако в формуле (16) отсутствует знак абсолютной величины, что уже несколько нарушает аналогию. Это расхождение объясняется просто. Простой определенный интеграл берется по ориентированному промежутку [n° **180**]: ведь a может быть и меньше и больше b, равно как и α может быть и меньше и больше β. В то же время двойной интеграл мы до сих пор рассматривали лишь по неориентированной области.

Можно, однако, и в случае двойного интеграла перейти к рассмотрению ориентированных областей. Ориентация области создается тем, что ее контуру придается определенное направление обхода — положительное или отрицательное [n° **332**]; одновременно такое же направление обхода придается и всем замкнутым простым кривым в пределах области. Если выбирается положительное направление обхода, то говорят, что область

положительно ориентирована, в противном же случае — что она отрицательно ориентирована.

Естественно условиться для ориентированной области (D) в качестве площади брать ее обыкновенную площадь со знаком плюс, если область ориентирована положительно, и со знаком минус — в противном случае. При разложении области (D) на части (D_i) эти части, как указывалось, ориентируются согласно с ориентацией всей области; соответственным образом снабжаются знаками и их площади.

Теперь, для ориентированной области (D) можно по образцу n° 338 построить понятие двойного интеграла

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy,$$

причем этот интеграл совпадает с определенным раньше, если область имеет положительную ориентацию, и отличается от него знаком в случае отрицательной ориентации.

Эта новая точка зрения на двойной интеграл позволяет прежде всего формулу (10) n° 353, выражающую площадь в криволинейных координатах, переписать без знака абсолютной величины при функциональном определителе:

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\,d\xi\,d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} J(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

если только ориентацию областей (D) и (Δ) производить согласованно. Это прямо следует из замечания n° 354, 1°.

При том же условии формулу (11) n° 354 можно написать также без знака абсолютной величины:

$$D = J(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot \Delta,$$

и в такой форме она служит естественным обобщением формулы Лагранжа.

Наконец, теперь и общая формула (15) может быть написана для согласованно ориентированных областей (D) и (Δ) в виде

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\,J(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Таким образом, стоило лишь поставить простые и двойные интегралы в одинаковые условия, чтобы аналогия стала полной!

Впрочем, в дальнейшем изложении мы все же вернемся к обычной точке зрения и будем рассматривать двойные интегралы, распространенные на неориентированные области.

358. Примеры. 1) Вычислим площадь фигуры, ограниченной *лемнискатой* (черт. 44):

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Наличие двучлена $x^2 + y^2$ наталкивает на мысль перейти к полярным координатам, полагая

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

и вычисляя искомую площадь по формуле

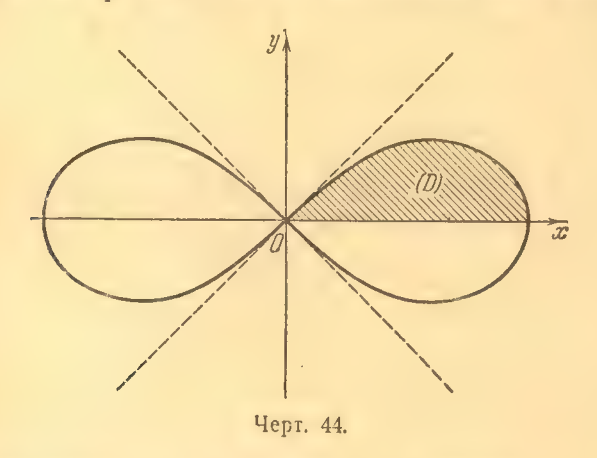
$$D = \iint\limits_{(\Delta)} r\,dr\,d\theta. \tag{17}$$

Так как наша кривая симметрична относительно координатных осей (это легко усмотреть из уравнения кривой, ибо оно не меняет вида при замене x на $-x$ или y на $-y$), то достаточно определить площадь части (D) фигуры, содержащейся в первом координатном угле, а затем учетверить ее.

Полярным уравнением лемнискаты служит

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta,$$

причем (если ограничиться первым координатным углом) θ надлежит изменять лишь от 0 до $\frac{\pi}{4}$ ввиду того, что $\cos 2\theta$ должен быть положительным.



Черт. 44.

Таким образом, область (Δ) на плоскости $r\theta$, отвечающая (D), ограничена кривою

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

(образ лемнискаты), отрезком оси r (который отвечает отрезку оси x) и отрезком оси θ, от $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{4}$ (образ одной лишь начальной точки — с нарушением взаимной однозначности соответствия *)).

Имеем

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2},$$

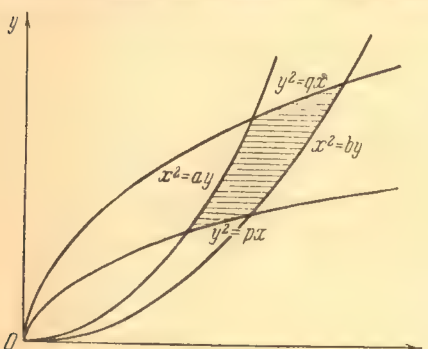
так что вся искомая площадь есть $2a^2$.

2) Укажем теперь другой подход к выбору системы криволинейных координат, который часто оказывается полезным при определении площади криволинейного четырехугольника. Если обе пары кривых, представляющих противоположные стороны этого четырехугольника, входят в состав — каждая — своего семейства кривых, заполняющих плоскость и зависящих от

---

*) См. по этому поводу замечание 4° в п° 354.

одного параметра, то именно эти два семейства естественно принять за сетку координатных линий. Их параметры обычно и дают удобную для данного случая систему криволинейных координат.



Черт. 45.

Разъясним этот прием на примере. Пусть требуется найти площадь фигуры, ограниченной параболами

$y^2=px$, $y^2=qx$, $x^2=ay$, $x^2=by$,

где $0<p<q$ и $0<a<b$ (черт. 45).

Здесь удобно рассмотреть два семейства параболы:

$$y^2=\xi x \quad (p\leqslant\xi\leqslant q)$$

и

$$x^2=\eta y \quad (a\leqslant\eta\leqslant b),$$

каждое из которых заполняет нашу фигуру, и из них составить сетку координатных линий. Это равносильно тому, что параметры их ξ и η мы принимаем за криволинейные координаты. Все это уже нам знакомо по n° **352**, 2); из написанных уравнений имеем: $x=\sqrt[3]{\xi\eta^2}$ и $y=\sqrt[3]{\xi^2\eta}$, так что функциональный определитель

$$J=-\frac{1}{3}.$$

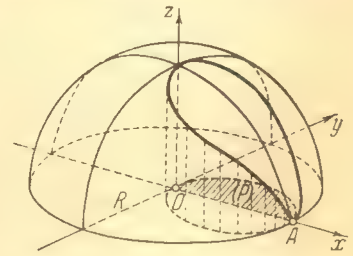
Отсюда сразу получаем

$$D=\frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

3) Найти объем V тела, вырезанного цилиндром $x^2+y^2=Rx$ из сферы $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ (черт. 46) (это тело иногда называется «телом Вивиани» — по имени итальянского математика XVII века, который впервые им заинтересовался).

Имеем [по формуле (2) n° **336**]:

$$V=4\iint\limits_{(P)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$



Черт. 46.

где P есть полукруг в первом квадранте плоскости xy, ограниченный линиями $x=0$ и $x^2+y^2=Rx$.

Непосредственное вычисление этого интеграла представляется громоздким; но оно значительно упрощается при переходе к полярным координатам.

Полярное уравнение контура (P), т. е. полуокружности, будет $r=R\cos\theta$ при изменении θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$V=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr=\frac{4}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

4) Полярные координаты часто бывают полезны при установлении существования «несобственных» двойных интегралов [n° 344, 4) и замечание]. Для примера установим условия существования интегралов ($m > 0$);

(а) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}$ (особая точка — в начале);

(б) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^m}$ (особая линия — единичная окружность вокруг начала);

(в) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}$ (простирающаяся в бесконечность область).

Имеем, в случае (а),

$$\iint\limits_{0<\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m} = 2\pi\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dr}{r^{2m-1}},$$

что̀ при $\varepsilon\to 0$ стремится к конечному пределу $2\pi\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dr}{r^{2m-1}}$, лишь если $2m-1<1$, т. е. при $m<1$. В случае (б):

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq(1-\varepsilon)^2} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^m} = 2\pi\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{r\,dr}{(1-r^2)^m} \to 2\pi\int\limits_0^1 \frac{r\,dr}{(1-r^2)^m}$$

(при $\varepsilon\to 0$),

если $m<1$. Наконец, для интеграла (в):

$$\iint\limits_{1\leq x^2+y^2\leq R^2} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m} = 2\pi\int\limits_1^R \frac{dr}{r^{2m-1}} \to 2\pi\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r^{2m-1}} \qquad (\text{при } R\to\infty),$$

если $2m-1>1$, т. е. $m>1$.

359. Исторические замечания. Двойные интегралы впервые были введены Эйлером — в работе, доложенной Петербургской академии в 1769 г. Сначала он рассматривает своего рода н е о п р е д е л е н н ы й двойной интеграл $\iint Z\,dx\,dy$ как такую функцию от x и y, которая приводит к выражению $Z\,dx\,dy$, если ее последовательно продифференцировать по этим переменным в том или другом порядке. Таким образом, этот двойной интеграл отождествляется с обоими повторными интегралами

$$\int dx\int Z\,dy \quad \text{и} \quad \int dy\int Z\,dx,$$

и общее его выражение содержит в виде слагаемых как произвольную функцию только от x, так и произвольную функцию только от y.

Затем, в связи с задачей о вычислении объема и поверхности тела, Эйлер вводит определенный двойной интеграл, трактуя его одновременно и как сумму своих элементов, и как повторный интеграл — того или другого типа. Если первым вычисляется, скажем, $\int Z\,dy$ (при постоянном x), то он распространяется на все значения y между пределами, которые зависят, вообще говоря, от x. В результате получается функция от одного x (а не от x и y, как в случае неопределенного интеграла), которая и интегрируется уже между постоянными пределами *). Все пределы определяются из рассмотрения самого «основания» (так Эйлер называет область интегрирования: она и в самом деле обычно служит у него основанием для того тела, объем или поверхность которого ищется).

В упомянутой выше работе Эйлер занимается и вопросом о замене переменных x, y под знаком двойного интеграла новыми переменными t, u. При этом предполагается, что x, y являются функциями от t, u, причем

$$dx = R\,dt + S\,du, \quad dy = T\,dt + V\,du, \tag{18}$$

так что R, S, T, V означают соответственные частные производные. Пределы, между которыми изменяются новые переменные, определяются прежним «основанием». После подстановки в подинтегральную функцию вместо x и y, их выражений через t и u остается открытым лишь вопрос: *чем заменить элемент площади $dx\,dy$?*

Эйлер сразу же отвергает мысль о том, чтобы попросту подставить вместо dx и dy их выражения (18). Он справедливо замечает далее, что вообще «*нет никакого разумного основания, почему бы выражение, вводимое в вычисление вместо $dx\,dy$, должно быть ему равно*»: важно лишь, чтобы совпадали окончательные результаты интегрирований. Вместе с тем это выражение должно содержать множителем $dt\,du$, т. е. иметь вид $Z\,dt\,du$, для того чтобы интеграл по новым переменным можно было также трактовать как повторный.

Для разыскания множителя Z Эйлер прибегает к последовательному введению новых переменных, так что при каждом шаге ему приходится лишь заменять одну переменную в простом интеграле (во внутреннем). В результате он приходит к выражению

$$Z = ST - RV,$$

в котором читатель легко узнает функциональный определитель. Однако у Эйлера все же возникает «тяжкое сомнение», в связи с тем, что, переставив x и y, можно было бы совершенно аналогично получить и выражение

$$Z = RV - ST$$

с обратным знаком! Объясняется это тем, что Эйлер здесь нигде не выписывает пределов интеграла и не уделяет внимания их расстановке. Затруднение разрешается с помощью соображения, что площадь должна всегда получаться положительной, а значит и Z надлежит брать положительным. Таким образом, окончательно, вместо $dx\,dy$ следует подставлять выражение

$$|ST - RV|\,dt\,du. \tag{19}$$

Это выражение Эйлер получает с помощью чисто формальных операций, отнюдь не приравнивая его элементу площади $dx\,dy$, но и вообще не выясняя его геометрического смысла.

---

*) В этой работе Эйлер еще не ставит пределов при интегралах.

Несколькими годами позже Эйлера к тому же вопросу о замене переменных, но уже в тройном интеграле, обратился Лагранж. Если перефразировать его соображения на случай двойного интеграла, то можно сказать, что Лагранж пытается доказать, будто элементарная площадь $dx\,dy$ просто равна выражению (19).

Лишь в 1836 г. в сообщении Петербургской академии, озаглавленном «Преобразование переменных в кратных интегралах», Остроградский внес в вопрос полную ясность. Прежде всего — на простом примере преобразования переменных к полярным координатам — он установил неправильность соображений Лагранжа. Затем он дал оригинальное изложение вопроса, в существенном воспроизведенное выше, в n° **355**. Выражение (19) получило отчетливое геометрическое истолкование, как площадь элементарного криволинейного четырехугольника *), причем впервые убедительно мотивируется и необходимость рассматривания именно абсолютной величины определителя.

---

*) Которая вовсе не обязана быть равна площади элементарного прямоугольника.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ДВУСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ

360. Параметрическое представление поверхности. Мы вернемся к вопросу об аналитическом представлении поверхности в пространстве [ср. n° **213**], остановившись на — незнакомом еще читателю — очень важном типе такого представления, называемом *параметрическим*.

В n° **212** уже была речь о параметрическом представлении кривой в пространстве [см. там (15)]

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t), \tag{1}$$

так что положение точки на ней определялось значением одного параметра t, изменяющегося в некотором промежутке. При определении положения точки на поверхности, заданной явным уравнением, скажем,

$$z=f(x,\ y), \tag{2}$$

мы имели дело уже с двумя параметрами, роль которых здесь играют абсцисса x и ордината y. В общем случае в качестве параметров появляются две произвольные переменные u и v, и *параметрическое представление поверхности* осуществляется с помощью трех уравнений

$$x=\varphi(u,\ v),\quad y=\psi(u,\ v),\quad z=\chi(u,\ v)\ ^{*}), \tag{3}$$

где функции φ, ψ, χ определены и непрерывны в некоторой области (Δ) на «плоскости параметров» uv.

Основным для нас будет случай, когда каждая точка поверхности получается лишь при одной паре значений параметров, так что уравнения (3) устанавливают взаимно-однознач-

*) Задание поверхностей с помощью двух параметров, впервые введенное Эйлером, особенно широко и плодотворно было использовано в дифференциальной геометрии Гауссом.

ное соответствие между точками поверхности и точками плоской области (Δ); такую поверхность будем называть *простой*. При этом мы будем предполагать, что и область (Δ) и поверхность ограничены простыми замкнутыми контурами; они, необходимо, соответствуют один другому по формулам (3).

Параметры u и v носят название *криволинейных координат* соответствующей точки. Если в уравнениях (3) фиксировать значение одной из криволинейных координат, например, положить $u=u_0$, то, очевидно, получатся уравнения некоторой кривой

$$x=\varphi(u_0, v), \quad y=\psi(u_0, v), \quad z=\chi(u_0, v),$$

которая всеми точками лежит на поверхности. Изменяя значение u_0, получим целое семейство таких «кривых (u)». Аналогично, фиксируя значение $v=v_0$, получим также кривую на нашей поверхности

$$x=\varphi(u, v_0), \quad y=\psi(u, v_0), \quad z=\chi(u, v_0);$$

из таких «кривых (v)» также составляется целое семейство. Все подобные линии называют координатными линиями поверхности. Если поверхность является простой, то через любую ее точку проходит по одной координатной линии из каждого семейства.

Все это уже знакомо читателю, но лишь для того случая, когда поверхность плоская! [См. n° **352**.]

Предположим теперь, что функции (3) не только непрерывны, но и имеют в области (Δ) непрерывные частные производные первого порядка, и рассмотрим функциональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Пусть для значений параметров (u_0, v_0), определяющих точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности, отличен от нуля хоть один из определителей второго порядка матрицы (4), например, пусть

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, переписав первые два из уравнений (3) в виде

$$\varphi(u, v)-x=0, \quad \psi(u, v)-y=0,$$

на основании теоремы 3 n° **317** можем утверждать, что этой системой двух уравнений с четырьмя переменными u, v, x, y (если ограничиться значениями их, близкими к интересующим нас: u_0, v_0, x_0, y_0) переменные u, v определяются как однозначные функции от x, y: $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, непрерывные со своими

производными. Наконец, подставляя эти выражения u, v в третье из уравнений (3), придем к представлению части поверхности, окружающей точку M_0, явным уравнением

$$z=\chi(u(x, y), v(x, y))=f(x, y)$$

типа (2), причем функция f также непрерывна и имеет непрерывные производные.

Лишь тогда, когда все три определителя матрицы (4) одновременно обращаются в 0 (соответствующая точка M_0 поверхности в этом случае называется особой), такое представление может оказаться недостижимым.

Возьмем на простой поверхности (3) какую-нибудь не особую точку $M(x, y, z)$. Тогда, как мы только что видели, в некоторой ее окрестности поверхность представима явным уравнением того или другого вида и, следовательно [n° **213**], в точке M имеет касательную плоскость. Уравнение последней может быть написано в виде

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0\ ^{*}), \tag{5}$$

где коэффициенты A, B, C еще подлежат определению.

Если в уравнениях поверхности закрепить за v значение, отвечающее выбранной точке M, то получатся уравнения «кривой (v)», проходящей через эту точку. Касательная к этой кривой в точке M выразится уравнениями [n° **212**, (16)]

$$\frac{X-x}{x'_u}=\frac{Y-y}{y'_u}=\frac{Z-z}{z'_u}.$$

Аналогично, фиксируя u, получим другую координатную линию, проходящую через точку M («кривую (u)») и имеющую в ней касательную

$$\frac{X-x}{x'_v}=\frac{Y-y}{y'_v}=\frac{Z-z}{z'_v}.$$

Так как обе эти касательные должны лежать в плоскости (5), то выполняются условия:

$$Ax'_u+By'_u+Cz'_u=0,$$
$$Ax'_v+By'_v+Cz'_v=0.$$

В таком случае коэффициенты A, B, C должны быть пропорциональны определителям матрицы

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}\ ^{**}). \tag{4a}$$

*) Как обычно, через X, Y, Z обозначены текущие координаты, в отличие от координат x, y, z фиксированной точки на поверхности.

**) Эта матрица лишь обозначениями отличается от матрицы (4). Напомним, что в рассматриваемой точке определители ее — не все нули.

Обыкновенно их полагают просто равными этим определителям, так что впредь мы всегда будем считать

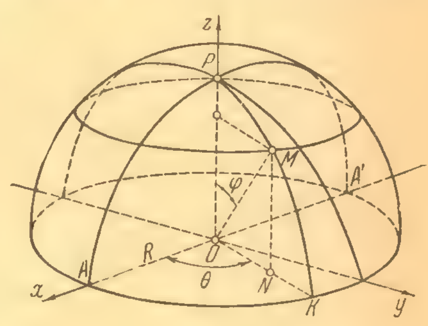
$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Отметим еще, что направляющие косинусы нормали будут

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Мы ограничивались до сих пор рассмотрением *простых* поверхностей. В общем случае мы будем предполагать как поверхности, ограниченные контурами, так и замкнутые поверхности составленными из *конечного* числа простых кусков, *примыкающих один к другому, но не пересекающихся*. Если такую поверхность «общего вида» и удается представить параметрическими уравнениями (3), то — заведомо с нарушением взаимной однозначности соответствия между ее точками и точками плоской области (Δ).

Примеры. 1) Рассмотрим сферу радиуса R с центром в начале (черт. 47): $x^2+y^2+z^2=R^2$. Желая получить ее обычное параметрическое представление, проведем «экваториальное» сечение AKA', а через «полюсы» P, P' и рассматриваемую точку M — «меридиан» $PMKP'$. Положение точки M на сфере может быть определено углами $\varphi = \measuredangle POM$ и $\theta = \measuredangle AOK$. Имеем $z = NM = R\cos\varphi$. Затем, $ON = R\sin\varphi$, а через ON координаты x и y (те же для M, что и для N) выразятся так: $x = ON\cos\theta$, $y = ON\sin\theta$. Окончательно, *параметрические уравнения сферы получим в виде:*



Черт. 47.

$$x = R\sin\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\sin\theta, \quad z = R\cos\varphi,$$

причем угол φ достаточно изменять от 0 до π, а угол θ — от 0 до 2π.

Однако соответствие между точками сферической поверхности и точками прямоугольника $[0, \pi; 0, 2\pi]$ на плоскости $\varphi\theta$ не будет взаимно однозначным: не только значения $\theta=0$ и $\theta=2\pi$ приводят к одним и тем же точкам поверхности, но при $\varphi=0$ (π), каково бы ни было значение θ — получается одна лишь точка — полюс P (P').

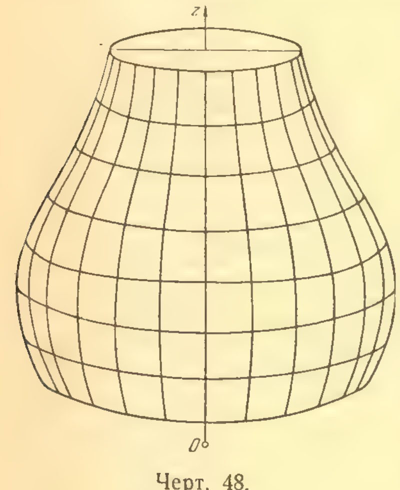
Легко видеть, что одно семейство координатных линий на сфере составится из *меридианов* ($\theta = \text{const}$), а другое — из *параллельных кругов* ($\varphi = \text{const}$).

2) Можно обобщить предыдущий пример следующим образом. Пусть в плоскости xz задана кривая («образующая») своими параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(u), \quad z=\psi(u) \qquad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta),$$

причем $\varphi(u)\geqslant 0$. Станем вращать ее, как твердое тело, вокруг оси z (черт. 48). Если через v обозначить угол поворота, то уравнения получаемой *поверхности вращения* напишутся в виде

$$x=\varphi(u)\cos v, \quad y=\varphi(u)\sin v, \quad z=\psi(u)$$
$$(\alpha\leqslant u\leqslant\beta, \quad 0\leqslant v\leqslant 2\pi).$$



Черт. 48.

Если в плоскости xz взять полуокружность

$$x=R\sin u, \quad z=R\cos u$$
$$(0\leqslant u\leqslant\pi)$$

и вращать ее вокруг оси z, то параметрическое представление образуемой таким путем *сферы* мы получим (с точностью до обозначений) в прежнем виде.

Координатными линиями и здесь служат различные положения образующей (меридианы) и параллельные круги.

361. Сторона поверхности. Установим важное для дальнейшего изложения понятие стороны поверхности.

В ряде случаев это понятие интуитивно ясно. Если поверхность задается явным уравнением вида $z=f(x, y)$, можно говорить о в е р х н е й стороне или о н и ж н е й стороне поверхности *). Если поверхность ограничивает некоторое тело, то также легко представить себе ее две стороны — в н у т р е н н ю ю, обращенную к телу, и в н е ш н ю ю, обращенную к окружающему тело пространству.

Исходя из этого интуитивного представления, постараемся теперь дать точное определение понятия стороны поверхности.

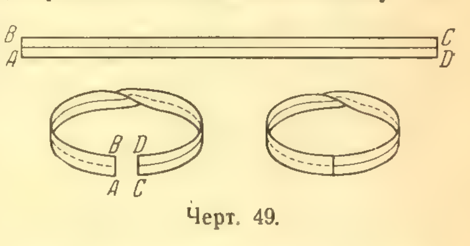
Рассмотрим поверхность (S), замкнутую или нет, и предположим, что в каждой точке поверхности имеется определенная касательная плоскость, положение которой н е п р е р ы в н о изменяется вместе с точкой касания.

Взяв на поверхности определенную точку M, проведем в ней нормаль, которой припишем определенное направление — одно из двух возможных (они отличаются одно от другого знаками направляющих косинусов). Проведем по поверхности замкнутый контур, исходящий из M_0 и возвращающийся в M_0, причем предположим, что он н е п е р е с е к а е т границы поверхности (если таковая имеется). Заставим точку M обойти этот контур и в каждом из последовательных ее положений будем приписывать нормали то из

*) Мы часто будем пользоваться подобным выражением (подразумевая при этом, что сама ось z направлена вертикально в в е р х).

двух направлений, в которое непрерывно переходит направление, выбранное нами в начальном положении M_0. При этом может случиться одно из двух: либо после обхода контура мы вернемся в точку M_0 с тем же направлением нормали, либо же — с направлением, противоположным исходному.

Если для какой-либо точки M_0 и какого-либо проходящего через нее контура M_0AM_0 имеет место последнее обстоятельство, то и для любой другой точки M_1 легко построить замкнутый контур, который, выходя из M_1 и возвращаясь в нее же, приведет нас в эту точку с направлением нормали, противоположным исходному. Таким, например, будет контур $M_1M_0AM_0M_1$, если под M_1M_0 разуметь какую-нибудь проходящую по поверхности кривую, соединяющую M_1 с M_0, но не пересекающую границы поверхности, а под M_0M_1 — ту же кривую в обратном направлении.



Черт. 49.

В этом случае поверхность называют *односторонней*. Классическим примером такой поверхности является так называемый лист Мебиуса (черт. 49). Модель ее можно получить, если прямоугольный кусок бумаги $ABCD$, перекрутив один раз, склеить так, чтобы точка A совпала с C, а B с D. Если полученное перекрученное кольцо начать красить в какой-либо цвет, то можно, не переходя через его границы, покрасить все кольцо этим цветом. Мы впредь подобные поверхности исключим из рассмотрения.

Предположим теперь, что какова бы ни была точка M_0 и каков бы ни был замкнутый контур, проходящий через M_0 и не пересекающий границы поверхности, после обхода его мы неизменно возвращаемся в исходную точку M_0 с исходным же направлением нормали. При этих условиях поверхность называется *двусторонней*.

Пусть же S — двусторонняя поверхность. Возьмем на ней любую точку M_0 и нормали в этой точке припишем определенное направление. Взяв какую-либо другую точку M_1 поверхности, соединим M_0 и M_1 произвольным путем (K), лежащим на поверхности и не пересекающим ее границы, и заставим точку M перейти из M_0 в M_1 по этому пути. Если при этом непрерывно изменять направление нормали, то точка M придет в положение M_1 с вполне определенным направлением нормали, не зависящим от выбора пути (K). Действительно, если бы, приходя в точку M_1 из точки M_0 по двум различным путям (K_1) и (K_2), мы получали в точке M_1 различные направления нормали, то замкнутый путь $M_0\,(K_1)\,M_1\,(K_2^{-1})\,M_0$ *)

*) Под (K_2^{-1}) мы разумеем кривую (K_2), но описанную в обратном направлении — от M_1 к M_0.

приводил бы нас в точку M_0 с направлением нормали, отличным от исходного, что противоречило бы определению двусторонней поверхности.

Таким образом, на двусторонней поверхности выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет выбор направления нормали во всех точках поверхности. *Совокупность всех точек поверхности с приписанными нормалям в них по указанному правилу направлениями и называется определенной стороной поверхности.*

Примеры. 1) Простейшим и наиболее важным примером двусторонней поверхности является поверхность, выражаемая явным уравнением $z = z(x, y)$, в предположении, что функция z непрерывна в некоторой плоской области (D) и допускает в ней непрерывные частные производные

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

В этом случае направляющие косинусы нормали к поверхности имеют выражение [n° 213, (24)]:

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \cos\mu = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$\cos\nu = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{8}$$

Выбрав перед радикалом определенный знак, мы тем самым устанавливаем во всех точках поверхности определенное направление нормали. Так как направляющие косинусы, в силу сделанных предположений, будут непрерывными функциями координат точки, то и установленное направление нормали будет также непрерывно зависеть от положения точки. Отсюда ясно, что *выбор знака перед радикалом в формулах для* $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ *определяет сторону поверхности* в том именно смысле, какой выше приписан этому понятию.

Если выберем перед радикалом знак плюс, то во всех точках поверхности

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

будет положительным, т. е. угол, составленный с осью z нормалью, соответствующей выбранной стороне, будет острым. Таким образом, сторона поверхности, определяемая указанным выбором знака, оказывается верхней стороной. Напротив, выбор знака минус в выражениях направляющих косинусов нормали характеризует нижнюю сторону поверхности: нормали составляют с осью z тупые углы.

2) Рассмотрим теперь более общо произвольную простую поверхность (S), заданную параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{3a}$$

причем параметры u, v изменяются в некоторой ограниченной области (Δ) на плоскости uv. Мы предположим поверхность *гладкой*: это означает, что функции (3a) непрерывны в (Δ) вместе со своими частными производными и что на поверхности нет особых точек.

Для направляющих косинусов нормали к поверхности мы имели формулы (7). И в этом случае *выбор знака перед радикалом характеризует сторону поверхности,* так что поверхность оказывается двусторонней.

Действительно, раз знак выбран, формулы (7) каждой точке поверхности (так как ей отвечает одна лишь пара значений u, v!) сопоставляют одно определенное направление нормали, которое при передвижении точки изменяется непрерывным образом.

При нарушении предположения о простоте поверхности уже нельзя безоговорочно утверждать, что она двусторонняя. В этом случае найдется точка M_0 поверхности, которой отвечают две различные пары u_0v_0 и u_1v_1 значений параметров, и может случиться, что при этих значениях формулы (7), даже если знак перед радикалом выбран одинаково, определяют противоположные направления нормали в точке M_0. Если это действительно так, то поверхность будет односторонней.

Замечание. Если поверхность (S) оказывается замкнутой и ограничивает некоторое тело, то [n° **360**], хотя она и может выражаться уравнениями (3а), но на этот раз предположение о взаимно однозначном соответствии между точками поверхности и точками плоской области (Δ) не осуществимо в полной мере. Тем не менее, так как наличие у поверхности двух сторон — внешней и внутренней — ясно непосредственно, и в этом случае *выбор знака в формулах* (7) *все же определяет сторону поверхности.*

362. Ориентация поверхности и выбор ее стороны. Пусть (S) будет простая гладкая поверхность, ограниченная простым контуром (L); выберем определенную сторону этой поверхности. Припишем теперь контуру (L) определенное направление обхода в качестве положительного по следующему правилу: обход должен казаться происходящим против часовой стрелки наблюдателю, движущемуся в этом направлении по контуру так, что нормаль к поверхности, отвечающая выбранной стороне, пронизывает его от ног к голове. Слова «против часовой стрелки» означают, точнее говоря, что наблюдатель должен видеть непосредственно прилегающую к нему часть поверхности слева от себя. По тому же правилу одновременно устанавливается положительное направление обхода для каждого простого замкнутого контура, лежащего на поверхности и ограничивающего некоторую ее часть *). Направление обхода, обратное положительному, назовем отрицательным.

В совокупности все это и составляет содержание понятия ориентации поверхности.

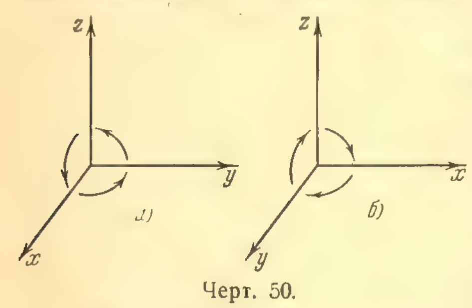
Если исходить из другой стороны поверхности, то нормали изменят свое направление на обратное, изменится положение наблюдателя, в связи с чем по нашему правилу придется переставить положительное и отрицательное направления обхода контура (L) и других контуров, лежащих на поверхности: поверхность изменит

*) Только с этой частью и надлежит считаться при определении положительного направления на контуре.

свою ориентацию. Таким образом, если всегда держаться установленного правила, *выбор стороны поверхности определяет ее ориентацию* и, обратно, *выбор положительного направления обхода контура поверхности однозначно определяет ее сторону.*

Замечание. В основе этого правила лежит вращение против часовой стрелки, и *во избежание путаницы мы всегда будем из него исходить.*

С этим мы будем связывать и самое расположение координатных осей в пространстве. Именно, во всех вопросах, для которых это имеет значение, *мы будем пользоваться так называемой правой координатной системой* (черт. 50 *а*): в ней оси располагаются так, что вращение от оси x к оси y $\left(\text{на угол } +\frac{\pi}{2}\right)$, если на него смотреть со стороны положительной части оси z, кажется происходящим против часовой стрелки*). (На черт. 50 *б* изображена система осей, для которой упомянутое вращение происходит по часовой стрелке*): такая система называется левой.)



Черт. 50.

Сейчас мы дадим приложение изложенной выше идеи о связи между выбором стороны поверхности и созданием на ней определенной ориентации к вопросу о выборе знака в формулах (7) для направляющих косинусов нормали к поверхности.

Вернемся к рассмотренной в начале номера поверхности (S), считая, что на ней выбрана определенная сторона, а с нею — и ориентация. Контур (L) нашей поверхности соответствует контуру (Λ) области (Δ) на «плоскости параметров» uv. Допустим (это всегда легко осуществить), что положительному обходу контура (Λ) отвечает положительный же обход контура (L). Тогда и для любых соответствующих друг другу контуров (λ) в области (Δ) и (l) на поверхности (S) имеет место то же самое: положительный обход (λ) влечет за собой положительный обход (l) **).

При этих условиях для характеристики выбранной стороны поверхности в формулах (7) *для направляющих косинусов нормали перед радикалом нужно взять знак плюс.*

Для доказательства этого достаточно установить, что хоть в

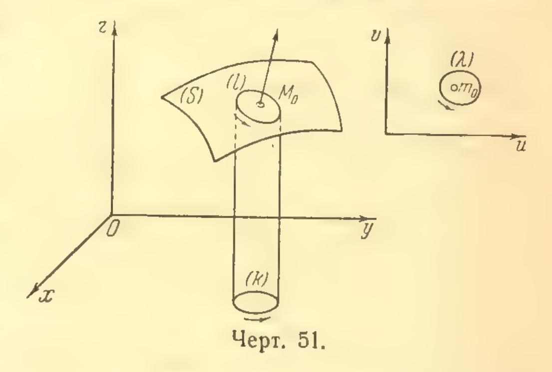
*) Это сохраняется и при круговых перестановках букв xyz.

**) Так как о направлении обхода контура можно судить по направлению, в котором описывается любая его часть, то высказанное утверждение очевидно для контура (λ), имеющего общую часть с (Λ), а затем легко переносится и на общий случай.

одной точке направление, определяемое этими формулами со знаком плюс, совпадает с нужным направлением нормали. Возьмем на поверхности какую-нибудь внутреннюю точку M_0; ей отвечает точка $m_0(u_0, v_0)$ в области (Δ). Пусть в этой точке отличен от нуля, скажем, определитель

$$C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Тогда найдется столь малая окрестность точки m_0 на плоскости uv, ограниченная контуром (λ), что соответствующая ей окрестность точки M_0 на поверхности (S), ограниченная контуром (l), представима явным уравнением вида $z = f(x, y)$ [n° **360**] и, следовательно, проектируется на плоскость xy взаимно однозначно. Обозначим контур этой проекции на плоскость xy через (k) (черт. 51).

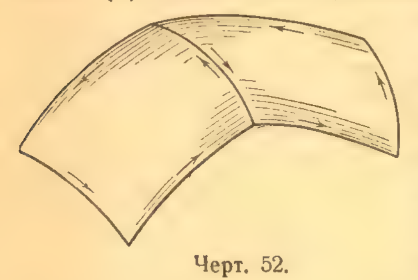


Черт. 51.

Если в рассматриваемой точке и в ее окрестности определитель $C > 0$, то положительному обходу контура (λ) отвечает положительный же обход (т. е. — при выбранном расположении осей — обход против часовой стрелки) контура (k) [см. n° **354**, 1)]. Как видно из чертежа, для того чтобы соответствующий этому обход контура (l) на поверхности тоже казался происходящим против часовой стрелки, на него нужно смотреть сверху, так что нормаль в точке M_0 в этом случае должна быть направлена вверх, т. е. должна составлять с осью z острый угол. Это именно и имеет место по формулам (7), если в них взять знак плюс, ибо при $C > 0$ тогда и $\cos\nu > 0$. Наоборот, при $C < 0$ нормаль должна составлять с осью z тупой угол, что также осуществляется на деле при указанном выборе знака, ибо при $C < 0$ и $\cos\nu < 0$.

363. Случай кусочно-гладкой поверхности. Развитые в n° **362** идеи дают также удобное средство для распространения понятия стороны поверхности на общий случай поверхности, состоящей из нескольких простых и гладких кусков; такую поверхность для краткости мы будем называть *кусочно-гладкой*. Соображения, изложенные в n° **361**, в этом случае непосредственно неприложимы, так как вдоль «ребер», соединяющих названные куски поверхности, определенной касательной плоскости вообще не существует, и при переходе через них о непрерывном изменении направления нормали говорить не приходится.

Пусть дана поверхность (S), состоящая из простых и гладких кусков (S_1), (S_2), ..., примыкающих один к другому по ребру — общей части их контуров. Предположим, прежде всего, что *каждый из этих кусков в отдельности является двусторонней поверхностью*. Но этого, разумеется, недостаточно для того, чтобы всю поверхность (S) можно было рассматривать, как двустороннюю; ведь и поверхность Мебиуса легко составляется из двух простых гладких двусторонних кусков.



Черт. 52.

На контуре (K_i) каждого куска (S_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ выберем в качестве положительного одно из двух направлений; этим, как мы видели, фиксируется сторона поверхности (S_i). Если этот выбор можно произвести так, чтобы всегда *общая часть контуров* *) *двух примыкающих кусков описывалась для этих кусков в противоположных направлениях* (черт. 52), то лишь тогда поверхность (S) является двусторонней. Сторона поверхности (S) определится, как совокупность сторон ее частей, выбранных указанным образом.

Если хоть в одном случае направление обхода контура заменить на противоположное, то для соблюдения нашего условия придется то же сделать и со всеми контурами. Тогда и выбранные стороны всех кусков (S_i) заменятся противоположными им; их совокупность составит вторую сторону поверхности.

Соображения n° **362** относительно связи стороны поверхности и ее ориентации остаются в силе и в общем случае поверхности, имеющей контур.

§ 2. ПЛОЩАДЬ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

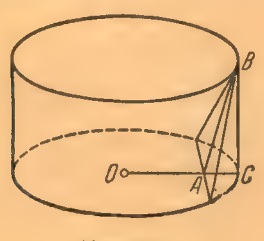
364. Пример Шварца. Понятие площади кривой поверхности имеет известную аналогию с понятием длины кривой линии. Длину (незамкнутой) дуги мы определяли как предел периметра вписанной в дугу ломаной — при условии, что длины всех ее сторон стремятся к нулю. В случае же кривой поверхности (тоже, скажем, незамкнутой) естественно было бы рассматривать вписанную в нее многогранную поверхность и определять площадь кривой поверхности как предел площади этой многогранной поверхности — при условии, что диаметры всех граней стремятся к нулю.

В конце прошлого столетия, однако, *была обнаружена непригодность этого определения*. Именно, Шварц в 1883 г. показал, что упомянутый предел не существует даже для простого случая поверхности прямого кругового цилиндра! Мы приведем этот поучительный пример.

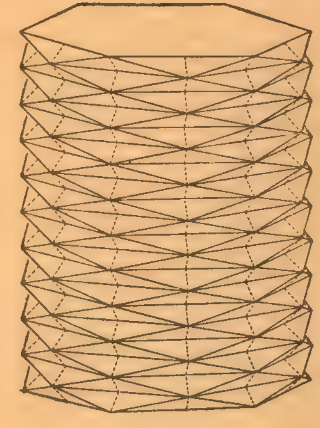
*) Эта часть может состоять и из отдельных кусков.

Пусть дан такой цилиндр радиуса R и высоты H. Впишем в него многогранную поверхность следующим образом. Разделив высоту цилиндра на m равных частей, проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные к оси цилиндра, так что на его поверхности получится $m+1$ окружностей (включая сюда и окружности обоих оснований цилиндра). Каждую из этих окружностей разделим на n равных частей *так, чтобы точки деления вышележащей окружности находились над серединами дуг нижележащей окружности.*

Возьмем, далее, треугольники, образованные хордами всех этих дуг и отрезками, соединяющими концы хорд с теми точками деления выше- и нижележащих



Черт. 53.



Черт. 54.

окружностей, которые расположены как раз над или под серединами соответствующих дуг (черт. 53). В своей совокупности эти $2mn$ равных треугольников и образуют нужную нам многогранную поверхность $(\Sigma_{m,n})$; модель ее представлена на черт. 54.

Подсчитаем теперь площадь σ каждого из треугольников. За основание примем хорду, длина которой равна

$$2R\sin\frac{\pi}{n}.$$

Для нахождения высоты AB треугольника (см. чертеж) заметим, что $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$, где

$$AC=OC-OA=R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\quad BC=\frac{H}{m}.$$

Таким образом, площадь одного треугольника равна

$$\sigma=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{H}{m}\right)^2},$$

а площадь всей многогранной поверхности будет

$$\Sigma_{m,n}=2mn\sigma=2R\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}.$$

Когда m и n неограниченно возрастают, то диаметры всех треугольников стремятся к нулю, но площадь $\Sigma_{m,n}$ предела не имеет. В самом деле,

допустим, что m и n возрастают так, что отношение $\frac{m}{n^2}$ стремится к определенному пределу q:

$$\lim \frac{m}{n^2} = q.$$

Имеем

$$\lim n \sin \frac{\pi}{n} = \pi,$$

а с другой стороны, в силу сделанного допущения

$$\lim m\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \lim m \cdot 2\sin^2 \frac{\pi}{2n} = \lim \frac{\pi^2}{2} \frac{m}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} q.$$

Следовательно,

$$\lim \sum\nolimits_{m,n} = 2\pi R \sqrt{\frac{\pi^4 R^2}{4} q^2 + H^2},$$

и мы видим, что предел этот существенно зависит от величины q, т. е. от способа одновременного возрастания m и n. При $q = 0$, и только в этом случае, названный предел равен $2\pi RH$ (величине площади, выведенной в школьном курсе геометрии), но вместе с q он может равняться даже бесконечности. Таким образом, при независимом друг от друга возрастании чисел m и n до бесконечности для площади $\sum_{m,n}$ определенного предела, действительно, не существует, и поверхность цилиндра, если стоять на точке зрения упомянутого определения, оказывается лишенной площади.

Важно дать себе отчет в том, чем отличается положение вещей в случае ломаной, вписанной в кривую, и в случае многогранной поверхности, вписанной в кривую поверхность. Будем для простоты считать кривую и кривую поверхность, о которых идет речь, гладкими. Тогда, лишь только хорды, составляющие ломаную, достаточно малы, направление каждой из них сколь угодно мало разнится от направления касательной в любой точке соответствующей дуги. Поэтому такая бесконечно малая хорда и может со все возрастающей точностью служить заменой соответствующего элемента дуги. Напротив, сколь угодно малая многоугольная площадка, вершины которой лежат на кривой поверхности, может оказаться вовсе не близкой по своему расположению в пространстве к касательной плоскости к поверхности; в таком случае заменять элемент поверхности она, понятно, не может. Это обстоятельство прекрасно иллюстрируется только что рассмотренным примером: касательные плоскости к цилиндрической поверхности все в е р т и к а л ь н ы, а треугольные грани вписанной поверхности при большом q становятся почти г о р и з о н т а л ь н ы м и, образуя мелкие складки.

365. Площадь поверхности, заданной явным уравнением. Ввиду указанного в предыдущем номере обстоятельства, приходится искать других путей для обоснования понятия площади кривой поверхности. Мы укажем один из таких путей, хотя простой, но не лишенный искусственности, причем начнем со случая поверхности (S), заданной явным уравнением

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Пусть x, y изменяются в квадрируемой области (D) на плоскости xy,

и z в этой области имеет непрерывные частные производные

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Разложим область (D) с помощью сетки кривых (с площадью, равной нулю) на элементы

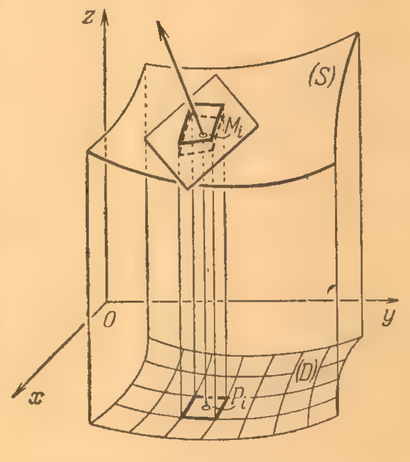
$$(D_1),\ (D_2),\ \ldots,\ (D_n)$$

и рассмотрим один из этих элементов, (D_i). Если построить на контуре этой частичной области (как на направляющей) цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси z, то она вырежет на поверхности (S) элемент (S_i). Взяв любую точку $P_i(x_i, y_i)$ в пределах (D_i), проведем в соответствующей точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где

$$z_i=f(x_i, y_i),$$

поверхности (S) касательную плоскость. Упомянутая выше цилиндрическая поверхность и на этой плоскости вырежет элементарную фигуру (T_i) (черт. 55), площадь которой T_i как бы служит приближением к площади элемента (S_i). Таким образом, сумму всех таких площадей

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} T_i$$



Черт. 55.

можно считать приближением к площади поверхности (S). *Мы определим площадь S этой поверхности как предел*

$$S=\lim \sigma=\lim \sum_{i=1}^{n} T_i$$

при условии, что стремятся к нулю диаметры всех элементов (S_i) или — что то же — диаметры всех плоских элементов (D_i).

Легко показать теперь, что S выражается двойным интегралом

$$S=\iint\limits_{(D)} \frac{1}{|\cos \nu|}\, dx\, dy, \qquad (2)$$

где, как всегда, ν означает угол нормали к поверхности с осью z *).

*) Обращаем внимание читателя на полную аналогию этого выражения (2) для площади кривой поверхности, заданной явным уравнением (1), и выражения (7) n° 328 для длины дуги кривой линии — тоже в случае ее явного задания уравнением $y=f(x)$.

Действительно, если ν_i есть значение ν, отвечающее именно точке M_i, то для площадей плоских фигур (T_i) и (D_i), из которых вторая служит ортогональной проекцией первой, будем иметь соотношение

$$D_i = T_i \cdot |\cos \nu_i|,$$

откуда

$$T_i = \frac{1}{|\cos \nu_i|} \cdot D_i.$$

Сумма

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\cos \nu_i|} \cdot D_i$$

является интегральной суммой для двойного интеграла (2) и, следовательно, стремится к нему как к пределу при указанном предельном переходе, что и требовалось доказать.

Если вспомнить формулы (8) n° **361**, именно *третью* из них, то полученный результат можно переписать так:

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy; \tag{2a}$$

самое существование интеграла (2) или (2а) вытекает из предположенной непрерывности частных производных p и q.

Замечание. Существенными недостатками этого простого определения площади S являются, во-первых, приложимость его только к поверхностям, представимым явными уравнениями, и, во-вторых, *кажущаяся* зависимость его от выбора координатной системы. Мы вернемся к этому в следующем номере.

366. Площадь поверхности в общем случае. Рассмотрим теперь простую гладкую поверхность (S), заданную параметрически.

Пусть M — любая ее точка, и в ней, скажем, $C \neq 0$. Тогда, опираясь на сказанное в n° **360**, можно утверждать следующее: существует часть (s) поверхности (S), окружающая точку M и обладающая свойствами:

1°. поверхность (s) может быть представлена явным уравнением вида (1);

2°. если через (δ) обозначить соответствующую часть области (Δ) на плоскости uv, то в (δ) определитель $C \neq 0$.

Это справедливо для каждой точки M поверхности с тем лишь, что отличным от 0 в ней может оказаться и какой-либо другой из определителей, A или B, тогда и явное уравнение вида (1) заменится, соответственно, явным же уравнением другого типа

$$x = h(y, z) \quad \text{или} \quad y = g(z, x).$$

Отсюда следует (на доказательстве чего останавливаться не будем), что *вся* поверхность (S) разлагается на *конечное* число кусков

вроде (s). Остановимся на вычислении площади куска (s) в согласии с определением предыдущего номера.

Если (d) есть проекция (s) на плоскость xy, то, как мы знаем [см. (2)], ее площадь

$$s = \iint\limits_{(d)} \frac{dx\,dy}{|\cos\nu|}. \tag{3}$$

Так как точки области (d) связаны с точками области (δ) взаимно однозначным соответствием, и выполнены другие требования n° **352** и **356**, то можно перейти в интеграле (3), по формуле (15) n° **356**, к переменным u, v. Учитывая, что функциональный определитель

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = C,$$

а

$$|\cos\nu| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

[см. n° **360**, (7)], в результате получим

$$s = \iint\limits_{(\delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv. \tag{4}$$

Замечательно, что это выражение оказалось симметричным относительно A, B, C, и на нем никак не отразилось то обстоятельство, что мы предположили именно определитель C отличным от нуля в (δ), а поверхность (s) — представленной явным уравнением вида (1): тот же результат получится и при других возможных предположениях!

Определим теперь площадь S всей поверхности (S) как с у м м у *площадей s отдельных ее частей* (s). Складывая все равенства вида (4), придем к окончательной формуле

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv, \tag{5}$$

очевидно, не зависящей от того, на какие части разлагалась поверхность (S).

З а м е ч а н и е. Покажем, что *величина* (5) *площади на деле не зависит от выбора параметрического представления рассматриваемой поверхности* (S).

Пусть от параметров u, v, областью изменения которых служит (Δ), мы переходим к параметрам $\bar{u}$, $\bar{v}$ с областью изменения $(\bar{\Delta})$, по формулам

$$u = U(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = V(\bar{u}, \bar{v}),$$

устанавливающим между этими областями взаимно однозначное соответствие (функции U и V предполагаются непрерывными со своими производными). Тогда поверхность выразится новыми уравнениями

$$x = \bar{x}(\bar{u}, \bar{v}), \quad y = \bar{y}(\bar{u}, \bar{v}), \quad z = \bar{z}(\bar{u}, \bar{v});$$

пусть и в этом представлении она не имеет особенностей. Полагая

$$J = \frac{D(u, v)}{D(\bar{u}, \bar{v})},$$

имеем *)

$$\bar{A} = AJ, \quad \bar{B} = BJ, \quad \bar{C} = CJ$$

[n° 325]. Отсюда, между прочим, ясно, что J в $(\bar{\Delta})$ отлично от нуля, ибо иначе поверхность в новом представлении имела бы особенности. Теперь по формуле замены переменных сразу получаем

$$S = \iint\limits_{(\bar{\Delta})} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, |J|\, d\bar{u}\, d\bar{v} = \iint\limits_{(\bar{\Delta})} \sqrt{\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2}\, d\bar{u}\, d\bar{v},$$

что и требовалось доказать.

Желая придать формуле (5) другой вид (в котором она обычно и употребляется), возведем в квадрат матрицу

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

и составим определитель

$$\begin{vmatrix} x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u & x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v & x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v \end{vmatrix};$$

по известной теореме алгебры [ср. n° 326] он окажется равным именно $A^2 + B^2 + C^2$. Обычно полагают

$$x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = E, \quad x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = F,$$
$$x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = G$$

— это так называемые *гауссовы коэффициенты* поверхности, играющие важную роль в дифференциальной геометрии. В этих обозначениях

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

так что формула (5) может быть написана и так:

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{5a}$$

Выражение

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \tag{6}$$

называют *элементом площади в криволинейных координатах*.

Замечание. С помощью формулы (5а), привлекая элементарные соображения из области векторного анализа, легко показать, что *выражение для площади S не зависит от выбора координатной системы,* так как выражения E, F, G сохраняют свою величину при преобразовании координат.

---

*) Обозначения ясны сами собой.

Мы ограничивались до сих пор случаем простой и гладкой поверхности. Если поверхность не подходит под этот случай, но разлагается на конечное число простых и гладких кусков, то ее площадью назовем сумму площадей отдельных кусков. При этом легко показать, что так определенная площадь на деле не зависит от того, как данная поверхность разложена на куски нужного типа. Если вся данная поверхность характеризуется параметрическими уравнениями, хотя бы и с нарушением взаимной однозначности соответствия в отдельных точках или вдоль отдельных линий, то площадь ее и в общем случае попрежнему выражается формулой (5) или (5а) [ср. 354, 4°].

Поверхность, имеющая площадь, называется *квадрируемой*.

367. Примеры. 1) Найти площадь частей сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанных из нее цилиндром $x^2 + y^2 = Rx$ (верхнего и нижнего оснований «тела Вивиани», см. n° 358, 3); черт. 46).

Решение. Имеем для верхнего основания

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

и, следовательно,

$$S = 2R \iint\limits_{(D)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

причем областью интегрирования служит круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = Rx$.

Переходя к полярным координатам, получим [ср. n° 358, 3)]

$$S = 4R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{R\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Выполняя интегрирование, окончательно найдем $S = 4R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Так как площадь поверхности полусферы равна $2\pi R^2$, то площадь поверхности той части полусферы, которая остается по выделении «тела Вивиани», будет равна $4R^2$ и, следовательно, выражается через радиус R без привлечения каких-либо иррациональностей. С этим обстоятельством, которое привлекло внимание Вивиани, последний и связал задачу, предложенную им своим современникам. Заметим, что объем упомянутой части полусферы также выражается без иррациональностей: он равен $\frac{8}{9} R^3$ [n° 358, 3)].

Замечание. Проведенная выкладка на деле требует некоторых оговорок в связи с тем, что в точке $(R, 0, 0)$ производные p и q, а с ними и подинтегральное выражение терпят разрыв; см. 2).

2) Решить задачу 1), используя параметрическое представление сферической поверхности:

$$x = R\sin\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\sin\theta, \quad z = R\cos\varphi$$
$$(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

По матрице производных

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

легко найти гауссовы коэффициенты сферы:

$$E = R^2,\ F = 0,\ G = R^2\sin^2\varphi,$$

так что $\sqrt{EG - F^2} = R^2\sin\varphi$.

Ограничимся рассмотрением четверти изучаемой поверхности, лежащей в первом октанте. Для точек «кривой Вивиани», т. е. кривой пересечения сферы и цилиндра (в пределах первого октанта), будет $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$.

Действительно, подставляя выражения x и y через φ и θ в уравнение цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, получим $\sin\varphi = \cos\theta$, и так как для рассматриваемых точек, очевидно, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то отсюда и следует, что $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$.

Установив, на основании сказанного, пределы изменения параметров φ и θ, получим по формуле (5а)

$$S = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \sin\varphi\, d\varphi = 4R^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Мы пришли к тому же результату, но избежав на этот раз разрывов подинтегральной функции.

3) Найти выражение для *площади поверхности вращения*

$$x = \varphi(u)\cos v,\quad y = \varphi(u)\sin v,\quad z = \psi(u)$$
$$(\alpha \leqslant u \leqslant \beta,\quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$$

[n° 360, 2)]. По матрице частных производных

$$\begin{pmatrix} \varphi'(u)\cos v, & \varphi'(u)\sin v, & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\sin v, & \varphi(u)\cos v, & 0 \end{pmatrix}$$

составляем выражение

$$\sqrt{EG - F^2} = \varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2},$$

так что площадь поверхности представится формулой

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}\, du.$$

[Ср. с формулой (6а) n° 205.]

§ 3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО ТИПА

368. Определение поверхностного интеграла первого типа. Поверхностные интегралы первого типа представляют собой такое же естественное обобщение двойных интегралов, каким криволинейные интегралы первого типа являются по отношению к простым определенным интегралам.

Строится это обобщение так. Пусть в точках некоторой двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности (S), ограниченной кусочно-гладким контуром, определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность (S) с помощью сети произвольно проведенных кусочно-гладких кривых на части (S_1), (S_2), ..., (S_n). Взяв в каждой части (S_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ по произволу точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим в этой точке значение функции

$$f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$$

и, умножив его на площадь S_i соответствующей части поверхности, составим сумму всех таких произведений:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i,$$

которую мы будем называть — по сходству со многими ранее рассмотренными суммами — интегральной суммой.

Конечный предел этой суммы при стремлении диаметров всех частей (S_i) к нулю называется поверхностным интегралом (первого типа)) от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности* (S) и обозначается символом

$$\iint\limits_{(S)} f(M)\, dS = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS, \tag{1}$$

где dS напоминает об элементарных площадях S_i.

369. Сведе́ние к обыкновенному двойному интегралу. Ограничимся случаем простой и гладкой поверхности (S).

Какова бы ни была функция $f(x, y, z)$, непрерывная в точках поверхности (S), интеграл (1) существует, и имеет место равенство

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS =$$
$$= (R) \iint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{2}$$

Таким образом, *для сведе́ния поверхностного интеграла первого типа к обыкновенному двойному нужно лишь заменить координаты x, y, z их выражениями через параметры, а элемент площади dS — его выражением в криволинейных координатах.*

Обратимся к доказательству высказанного утверждения.

---

*) В отличие от поверхностных интегралов второго типа, рассматриваемых ниже.

Как уже отмечалось, разложению поверхности (S) на части с помощью кусочно-гладких кривых отвечает подобное же разложение области (Δ), и обратно. Точно так же, если к нулю стремятся диаметры частей (S), то это справедливо и по отношению к диаметрам частей (Δ), и обратно.

Разложим же соответственным образом поверхность (S) на части $(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$, а область (Δ) — на части $(\Delta_1), (\Delta_2), \ldots, (\Delta_n)$ и выберем в каждой части (S_i) по точке (x_i, y_i, z_i), а в части (Δ_i) — по точке (u_i, v_i), которые также отвечали бы одна другой, так что

$$x_i = x(u_i, v_i), \quad y_i = y(u_i, v_i), \quad z_i = z(u_i, v_i). \tag{3}$$

Составим теперь интегральную сумму для интеграла (1):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i.$$

По общей формуле (5а) n° 366 будет

$$S_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Применив же теорему о среднем, получим

$$S_i = [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i,$$

где $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ есть некоторая точка области (Δ_i).

С помощью этого выражения для (S_i) и вспоминая (3), мы можем переписать сумму σ так:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i.$$

В этом виде она напоминает интегральную сумму для второго из интегралов (2):

$$\sigma^* = \sum f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) [\sqrt{EG - F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \cdot \Delta_i.$$

Различие между суммами σ и σ^* заключается в том, что в последней и сложная функция $f(\cdots)$ и корень $\sqrt{\cdots}$ всякий раз вычисляются для одной и той же произвольно взятой точки (u_i, v_i), а в первой — функция $f(\ldots)$ берется в точке (u_i, v_i), а выражение $\sqrt{\ldots}$ — в точке $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ (которая навязывается теоремой о среднем и *не произвольна*).

Рассмотрим разность между обеими суммами:

$$\sigma-\sigma^*=\sum_i f(\cdots)\left\{\left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}}-\left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}}\right\}\Delta_i.$$

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольно малое число. В силу (равномерной) непрерывности функции $\sqrt{EG-F^2}$, при достаточно малых диаметрах областей (Δ_i), будет

$$\left|\left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=\bar{u}_i\\ v=\bar{v}_i}}-\left[\sqrt{EG-F^2}\right]_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}}\right|<\varepsilon.$$

Учитывая ограниченность непрерывной функции f:

$$|f(x, y, z)|\leqslant L,$$

легко приходим к оценке

$$|\sigma-\sigma^*|<\varepsilon L\Delta,$$

так что

$$\lim(\sigma-\sigma^*)=0.$$

Отсюда ясно, что из существования предела для второй из этих сумм следует существование равного ему предела и для другой. Этим и доказано наше утверждение.

Если поверхность (S) задана явным уравнением:

$$z=z(x, y),$$

то формула (2) принимает вид

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS=(\mathrm{R})\iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy, \qquad (4)$$

где (D) означает проекцию поверхности (S) на плоскость xy.

Так как

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{|\cos\nu|}$$

(где ν, как обычно, есть угол между нормалью к поверхности и осью z), то формулу (4) можно написать и так:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dS=(\mathrm{R})\iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\frac{dx\,dy}{|\cos\nu|}. \qquad (5)$$

Мы предполагали до сих пор поверхность (S), на которую был распространен интеграл, простой и гладкой. Наши результаты легко переносятся и на общий случай поверхности, состоящей из конечного числа таких кусков.

370. Механические приложения поверхностных интегралов первого типа. 1°. С помощью названных интегралов можно определять массы, моменты, координаты центров тяжести и т. п. величины для материальных поверхностей, вдоль которых распределены массы с определенной в каждой точке поверхностной плотностью.

На деле здесь нет ничего нового по сравнению со случаем плоского распределения масс, рассмотренным выше.

2°. *Притяжение простого слоя.* Поверхностные интегралы первого типа естественно входят в рассмотрение при изучении притяжения масс, распределенных на поверхности.

Пусть по поверхности (S) непрерывным образом распределены массы с заданной в каждой точке $M(x, y, z)$ поверхности плотностью $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ *). Пусть, далее, в точке $A(\xi, \eta, \zeta)$ (вне поверхности) находится единица массы. Требуется определить, с какой по величине и по направлению силой $\overrightarrow{F}$ притягивается точка A поверхностью (S), если в основу положен ньютонов закон притяжения (закон всемирного тяготения).

Если бы точка A притягивалась одной лишь материальной точкой $M(x, y, z)$ с сосредоточенной в ней массой m, то величина силы притяжения была бы равна

$$F = \frac{m}{r^2} \;^{**)},$$

где r есть расстояние $\overline{AM}$, т. е.

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \tag{6}$$

Так как эта сила направлена от A к M, то ее направляющие косинусы будут

$$\frac{x-\xi}{r}, \quad \frac{y-\eta}{r}, \quad \frac{z-\zeta}{r}$$

и, следовательно, проекции силы притяжения $\overrightarrow{F}$ на оси координат выразятся так:

$$F_x = m\,\frac{x-\xi}{r^3}, \qquad F_y = m\,\frac{y-\eta}{r^3}, \qquad F_z = m\,\frac{z-\zeta}{r^3}. \tag{7}$$

В случае системы притягивающих материальных точек эти выражения заменились бы суммами подобных выражений; наконец, при непрерывном распределении масс по поверхности появятся вместо сумм интегралы.

Применяя обычный прием изложения, можно было бы рассмотреть элемент dS поверхности с массой $\rho\,dS$, как бы сосредоточенной в одной из его точек $M(x, y, z)$. Оказываемое им на точку A притяжение будет иметь проекции на оси [ср. (7)]:

$$dF_x = \rho\,\frac{x-\xi}{r^3}\,dS, \qquad dF_y = \rho\,\frac{y-\eta}{r^3}\,dS, \qquad dF_z = \rho\,\frac{z-\zeta}{r^3}\,dS,$$

---

*) В этом случае говорят о простом слое (в отличие от двойного слоя, которого мы не рассматриваем).

**) Как обычно, «постоянную тяготения», т. е. множитель пропорциональности в формуле Ньютона (зависящий от выбора единиц), мы заменяем единицей, чтобы упростить запись.

где r означает расстояние $\overline{AM}$, выражаемое формулой (6). Теперь остается лишь «просуммировать» эти выражения, что приведет к следующим формулам для проекций силы $\vec{F}$ притяжения простого слоя на оси:

$$F_x = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{x-\xi}{r^3} dS, \quad F_y = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{y-\eta}{r^3} dS, \quad F_z = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{z-\zeta}{r^3} dS. \tag{8}$$

Этим сила $\vec{F}$ определена полностью как по величине, так и по направлению.

Если бы притягиваемая точка A и сама лежала на поверхности (S), то проекции притяжения на оси попрежнему выражались бы интегралами (8), но на этот раз интегралы эти были бы несобственными, поскольку вблизи точки A подинтегральные функции все перестают быть ограниченными.

3°. *Потенциал простого слоя.* В случае одной притягивающей точки $M(x, y, z)$, как мы видели, проекции притягивающей силы на оси имеют выражения (7). Легко усмотреть, что эти проекции являются частными производными по ξ, η и ζ от функции

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \frac{m}{r},$$

которая называется *ньютоновским потенциалом* на точку A поля точки M. [Ср. n° **351**, 1)].

В случае поля, созданного системой материальных точек, потенциал выразился бы суммой дробей этого вида, причем производные потенциала по ξ, η, ζ попрежнему давали бы проекции силы притяжения на оси.

Отсюда естественно приходим к такому выражению для *потенциала простого слоя*, расположенного по поверхности (S), с плотностью ρ, на точку A:

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{dS}{r}. \tag{9}$$

Возникает лишь вопрос, сохраняется ли для этого потенциала фундаментальное свойство:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z, \tag{10}$$

где F_x, F_y, F_z суть проекции силы $\vec{F}$ притяжения простого слоя на оси и определяются формулами (8).

Если точка A не лежит на поверхности, так что никаких нарушений непрерывности нет, то легко показать, что к интегралу (9) при дифференцировании его по ξ, η или ζ применимо правило Лейбница (для этого понадобилось бы лишь повторение уже знакомых нам рассуждений). Таким путем оправдываются и для рассматриваемого случая распределения масс соотношения (10).

Примеры. 1) Найти силу притяжения точки однородным ($\rho = \text{const}$) сферическим слоем.

Решение. Пусть центр сферы лежит в начале координат, а притягиваемая точка A (массы 1) находится на положительной оси z на расстоянии a от центра. Проекции F_x и F_y силы притяжения на оси x и y, очевидно, равны нулю. Далее, имеем

$$F_z = \iint\limits_{(S)} \rho \frac{z-a}{r^3} dS$$

(r — расстояние между точкой A и произвольной точкой M сферы). Если перейти к сферическим координатам:

$$x = R\sin\varphi\cos\theta,\quad y = R\sin\varphi\sin\theta,\quad z = R\cos\varphi,$$

то

$$dS = R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta,\quad r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi}$$

и

$$F_z = 2\pi R^2\rho\int_0^\pi \frac{(R\cos\varphi - a)\sin\varphi\,d\varphi}{(R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi)^{3/2}}.$$

Подстановкой $R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi = t^2$ преобразуем это выражение

$$F_z = \frac{\pi R}{a^2}\rho\int_{|R-a|}^{R+a}\left(\frac{R^2 - a^2}{t^2} - 1\right)dt = -\frac{\pi R}{a^2}\rho\left(2R - \frac{R^2 - a^2}{|R-a|} - |R-a|\right).$$

Рассмотрим теперь два предположения.

(1) Пусть $a < R$; в таком случае $|R - a| = R - a$, в скобках стоит нуль и

$$F_z = 0.$$

Итак, *точка, находящаяся внутри однородного сферического слоя, не испытывает со стороны последнего никакого притяжения.*

(2) Если же $a > R$, то $|R - a| = -(R - a)$, так что

$$F_z = -\frac{4\pi R^2\rho}{a^2}.$$

Поэтому *точка, находящаяся вне однородного сферического слоя, испытывает со стороны последнего такое же притяжение, какое испытывала бы, если сосредоточить всю массу $m = 4\pi R^2\cdot\rho = S\rho$ слоя в его центре.*

2) Найти потенциал однородного сферического слоя в произвольно взятой точке.

Решение. При прежних обозначениях имеем

$$W(a) = \iint_{(S)}\rho\frac{dS}{r} = 2\pi R^2\rho\int_0^\pi\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi}} =$$

$$= \frac{2\pi R}{a}\rho\int_{|R-a|}^{R+a}dt = \frac{2\pi R}{a}\rho(R + a - |R - a|).$$

Если $a < R$, то

$$W(a) = 4\pi R\rho,$$

так что *внутри однородного сферического слоя его потенциал постоянен.*

Напротив, при $a > R$ будет

$$W(a) = \frac{4\pi R^2\rho}{a},$$

т. е. *потенциал, созданный сферическим слоем во внешнем пространстве, не изменится, если всю массу его сосредоточить в центре.*

Замечание. В случае $a = R$ в обеих задачах пришлось бы иметь дело с так называемым несобственным поверхностным интегралом, поскольку подинтегральная функция обращается в бесконечность.

§ 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО ТИПА

371. Определение поверхностных интегралов второго типа. Это новое интегральное образование строится по образцу криволинейного интеграла второго типа.

Там мы исходили из направленной (ориентированной) кривой и, разложив ее на элементы, каждый такой элемент, соответственно направленный, проектировали на координатную ось. Проекция получалась тоже направленной, и мы брали ее длину со знаком плюс или минус в зависимости от того, совпадало ли ее направление с направлением оси или нет.

Аналогичным образом рассмотрим теперь двустороннюю поверхность (S), гладкую или кусочно-гладкую, и фиксируем какую-либо из двух ее сторон; как мы видели [n° **362**], *это равносильно выбору на поверхности определенной ориентации.*

Для определенности предположим сначала, что поверхность задана явным уравнением

$$z = z(x, y),$$

причем точка (x, y) изменяется в области (D) на плоскости xy, ограниченной кусочно-гладким контуром. Тогда выбор возможен между верхней и нижней сторонами поверхности *). В первом случае замкнутой кривой на поверхности приписывается направление против часовой стрелки, если смотреть сверху, во втором — обратное направление.

Если поверхность разбита на элементы и каждый такой, соответственно ориентированный, элемент спроектировать на плоскость xy, то направление обхода контура проектируемой фигуры определит и направление обхода контура проекции. Это направление будет совпадать с вращением против часовой стрелки, т. е. отвечать ориентации самой плоскости xy, если фиксирована была верхняя сторона поверхности (S); в этом случае мы площадь проекции будем брать со знаком плюс. В случае нижней стороны вращение будет обратным, и площадь проекции будем брать со знаком минус [ср. n° **357**].

Пусть теперь в точках данной поверхности (S) определена некоторая функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разложив поверхность сетью кусочно-гладких кривых на элементы

$$(S_1), (S_2), \ldots, (S_n),$$

выберем в каждом элементе (S_i) по точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Затем вычислим значение функции $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ и умножим его на площадь D_i проекции на плоскость xy элемента (S_i),

---

*) См. сноску на стр. 298.

снабженную знаком по указанному выше правилу. Составим, наконец, сумму (тоже, своего рода, интегральную сумму)

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i. \tag{1}$$

Конечный предел этой суммы при стремлении к нулю диаметров всех частей (S_i), *называют поверхностным интегралом (второго типа) от*

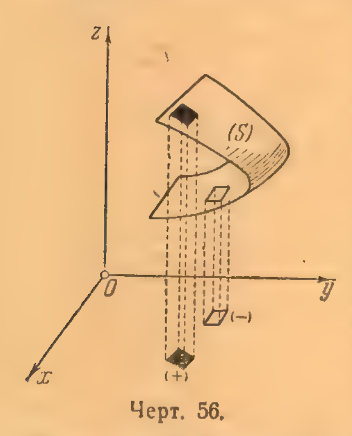
$$f(M)\, dx\, dy = f(x, y, z)\, dx\, dy,$$

распространенным на выбранную сторону поверхности (S), и обозначают символом

$$I = \iint_{(S)} f(M)\, dx\, dy = \iint_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy \tag{2}$$

(здесь $dx\, dy$ напоминает о площади проекции элемента поверхности на плоскость xy).

Впрочем, в этом символе не содержится как раз указания на то, какую именно сторону поверхности имеют в виду, так что указание приходится делать всякий раз особо. Из самого определения следует, что при замене рассматриваемой стороны поверхности противоположной стороной интеграл меняет знак.



Черт. 56.

Если поверхность не имеет указанного специального вида, то мы всегда впредь будем предполагать, что она состоит из конечного числа кусков, ограниченных кусочно-гладкими контурами и либо имеющих этот вид, либо представляющих собой часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси z (направляющая которой на плоскости xy имеет нулевую площадь). В случае элемента, лежащего на куске первого типа, мы уже знаем, как приписывать знак площади его проекции; эти знаки могут оказаться и различными для разных элементов, если одни элементы поверхности оказываются лежащими сверху, а другие снизу (черт. 56). Что же касается элемента, лежащего на упомянутой цилиндрической поверхности, то проекция его, стягивающаяся в линию, имеет нулевую площадь, и о знаке ее говорить не приходится *).

*) «Неправильных» элементов, принадлежащих различным кускам, из которых состоит поверхность, мы будем избегать (а можно было бы ими попросту пренебречь!).

В остальном определение поверхностного интеграла строится и для общего случая так же, как и выше.

Изменяя роли осей (соответственно чему изменяются и наши требования к поверхности), можно было бы проектировать элементы поверхности, вместо плоскости xy, на плоскость yz или zx. Так получаются другие два поверхностных интеграла второго типа:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dy\, dz \quad \text{или} \quad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dz\, dx. \qquad (2^*)$$

В приложениях чаще всего встречаются соединения интегралов всех этих видов:

$$\iint\limits_{(S)} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy,$$

где P, Q, R суть функции от (x, y, z), определенные в точках поверхности (S). Еще раз подчеркнем, что *во всех случаях поверхность* (S) *предполагается двусторонней и что интеграл распространяется на определенную ее сторону.*

372. Сведѐние к обыкновенному двойному интегралу. Мы будем предполагать функцию f непрерывной в точках поверхности (S).

1°. Рассмотрим сначала основной случай, когда поверхность (S) задана явным уравнением

$$z = z(x, y) \qquad ((x, y) \text{ из } (D)),$$

причем функция z непрерывна вместе со своими частными производными

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Если интеграл (2) берется по верхней стороне поверхности, то в интегральной сумме (1) все D_i положительны. Подставляя в эту сумму вместо z_i его значение $z(x_i, y_i)$, приведем ее к виду

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\, D_i,$$

в котором легко узнать интегральную сумму для обыкновенного двойного интеграла

$$(R) \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dx\, dy.$$

Переходя к пределу, установим и существование интеграла (2) и равенство

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = (\mathrm{R}) \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\,dx\,dy. \qquad (3)$$

Если распространить интеграл на нижнюю сторону поверхности (S), то будем иметь, очевидно,

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = -(\mathrm{R}) \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\,dx\,dy. \qquad (3a)$$

Легко теперь установить (для рассматриваемого случая) *связь между поверхностными интегралами обоих типов.* Пусть сначала речь идет (для интеграла второго типа) о верхней стороне поверхности. Если в формуле (5) n° **369**, считая угол ν острым, заменить функцию $f(x, y, z)$ через $f(x, y, z)\cos\nu$, то можно будет написать:

$$(\mathrm{R}) \iint\limits_{(D)} f(x, y, z(x, y))\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\nu\,dS.$$

Отсюда — с учетом (3) — получается искомая формула:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\cos\nu\,dS. \qquad (4)$$

Заменяя верхнюю сторону поверхности нижней, мы тем самым меняем знак левой части равенства (4). Если одновременно с тем под ν разуметь на этот раз тупой угол с осью z нормали, направленной вниз же, то косинус, а с ним и интеграл, также изменит знак, так что равенство сохранится.

2°. Если (S) есть часть цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси z, то все ее элементы имеют нулевые проекции, так что в этом случае

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,dx\,dy = 0. \qquad (5)$$

Очевидно здесь также имеет место формула (4): так как $\cos\nu = 0$, то и правая часть этой формулы будет нулем.

3°. Наконец, если поверхность (S) состоит из конечного числа кусков, рассмотренных в 1° или 2°, то, складывая формулы вида (4), относящиеся к отдельным кускам, убедимся в том, что формула (4) справедлива и в общем случае.

4°. Аналогичные формулы могут быть получены и для поверхностных интегралов (2*). Складывая все три формулы, написанные, соответственно, для произвольных непрерывных функций P, Q, R,

придем к общей формуле, связывающей поверхностные интегралы второго и первого типа:

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$
$$= \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\,dS. \qquad (6)$$

Подчеркнем, что *справа здесь фигурируют направляющие косинусы нормали, соответствующей той стороне поверхности, по которой взят интеграл слева.*

5°. Если поверхность (S) задана параметрически, то можно свести интеграл в правой части формулы (6) — а с ним и интеграл в левой части — к обыкновенному двойному интегралу, распространенному на область (Δ) изменения параметров. Предположим сначала поверхность простой и гладкой; пусть она ограничена кусочно-гладким контуром (L).

Выберем определенную сторону поверхности и тем самым установим на ней определенную ориентацию. Если положительному обходу контура (Λ) области (Δ) отвечает положительный же обход контура (L), то, как мы знаем [n° **362**], направляющие косинусы нормали, характеризующие именно выбранную сторону поверхности, определятся формулами

$$\cos\lambda = \frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\nu = \frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

со знаком $(+)$ перед корнем. С другой стороны, при переходе к двойному интегралу по параметрам u, v, элемент площади dS надлежит заменить выражением

$$+\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

[n° **369**]. Окончательно, получим равенство

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta)} (AP + BQ + CR)\,du\,dv. \qquad (7)$$

В правой части подразумевается, что в функции P, Q, R вместо x, y, z подставлены их выражения через u и v.

Замечание. Этот результат распространяется и на более общий случай поверхности, составленной из простых и гладких поверхностей, примыкающих одна к другой. Но перед интегралом справа может появиться как знак плюс, так и знак минус [см. n° **361**, замечание].

373. Формула Стокса. Обратимся теперь к выводу формулы, связывающей поверхностный интеграл с криволинейным и служащей обобщением уже известной нам формулы Грина [n° 346].

Мы сохраняем поначалу относительно поверхности (S) те же предположения, что в пункте 5° предыдущего номера.

Пусть в некоторой пространственной области, содержащей внутри себя поверхность S, задана функция $P(x, y, z)$, непрерывная в этой области вместе со своими частными производными. Тогда имеет место формула

$$\int\limits_{(L)} P\,dx = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy, \tag{8}$$

причем направление обхода контура (L) соответствует той стороне поверхности (S), на которую распространен интеграл справа.

Прежде всего преобразуем криволинейный интеграл по кривой (L), заменив его интегралом по кривой (Λ):

$$\int\limits_{(L)} P\,dx = \int\limits_{(\Lambda)} P\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right). \tag{9}$$

Равенство это легко проверить, если ввести параметрическое представление кривой (Λ):

$$u = u(t),\quad v = v(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

а через него — и кривой (L):

$$x = x(u(t),\ v(t)),\qquad y = y(u(t),\ v(t)),\qquad z = z(u(t),\ v(t)).$$

Тогда оба интеграла сведутся к одному и тому же обыкновенному интегралу по параметру

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} P\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}\right)dt.$$

Теперь к интегралу в (9) справа применим формулу Грина:

$$\int\limits_{(\Lambda)} P\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) = \iint\limits_{(\Delta)} \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\} du\,dv.$$

Так как последнее подинтегральное выражение в развернутом виде дает

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u} -$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

то мы приходим к двойному интегралу

$$\iint\limits_{(\Delta)} \left\{\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C\right\} du\, dv.$$

По формуле же (7) его легко преобразовать в поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy,$$

взятый именно по выбранной стороне поверхности. Этим и завершается доказательство равенства (8) *).

Эта формула установлена нами для простой и гладкой поверхности. Но ее легко распространить и на общий случай кусочно-гладкой поверхности, ограниченной кусочно-гладким контуром: стоит лишь написать ее для каждого простого и гладкого куска в отдельности и почленно сложить полученные равенства.

Путем круговой перестановки букв x, y, z получаются еще два аналогичных равенства:

$$\begin{aligned} \int\limits_{(L)} Q\, dy &= \iint\limits_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy\, dz, \\ \int\limits_{(L)} R\, dz &= \iint\limits_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y} dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz\, dx, \end{aligned} \tag{8a}$$

где Q и R — новые функции от x, y, z, удовлетворяющие тем же условиям, что и P.

Складывая все три равенства (8) и (8а), получим искомый результат в наиболее общей форме:

$$\int\limits_{(L)} P\, dx + Q\, dy + R\, dz =$$
$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx. \tag{10}$$

Это равенство и называется *формулой Стокса. Еще раз подчеркнем, что сторона поверхности и направление обхода контура взаимно определяются по правилу, установленному в* n°**362.**

Если в качестве куска поверхности (S) взять плоскую область (D) на плоскости xy, так что $z = 0$, то получится формула

$$\int\limits_{(L)} P\, dx + Q\, dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

---

*) Следует отметить, что при выводе нами использованы существование и непрерывность производных $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v\, \partial u}$, которые в окончательном результате не участвуют. На деле формула имеет место и без этих предположений.

в которой читатель узнает формулу Грина; таким образом, последняя является частным случаем формулы Стокса*).

Отметим, наконец, что поверхностный интеграл второго типа в формуле Стокса может быть заменен поверхностным интегралом первого типа. Тогда эта формула примет вид

$$\int\limits_{(L)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint\limits_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\lambda+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\mu+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\nu\right]dS,\quad (11)$$

причем $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ означают направляющие косинусы нормали, *отвечающей именно выбранной стороне поверхности.*

Для примера «проверим» формулу Стокса, положив

$$P=y^2+z^2,\ Q=z^2+x^2,\ R=x^2+y^2$$

и взяв в качестве (S) поверхность, вырезанную цилиндром

$$x^2+y^2=2rx \text{ из сферы } x^2+y^2+z^2=2Rx\ (R>r,\ z>0).$$

Прибегнув к параметрическому представлению кривой

$$x=r(1+\cos t),\ y=r\sin t,\ z=\sqrt{2r(R-r)}\,\sqrt{1+\cos t}\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)\ {**}),$$

для криволинейного интеграла найдем довольно сложное выражение в виде обыкновенного интеграла:

$$\int\limits_0^{2\pi}\Big\{[r^2\sin^2 t+2r(R-r)(1+\cos t)](-r\sin t)+$$
$$+[2r(R-r)(1+\cos t)+r^2(1+\cos t)^2]\,r\cos t+$$
$$+[r^2(1+\cos t)^2+r^2\sin^2 t]\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r(R-r)}{1+\cos t}}(-\sin t)\Big\}\,dt.$$

Но первое и третье слагаемые в фигурных скобках, умноженные на dt, имеют вид $f(\cos t)\,d\cos t$, и интегралы от них, ввиду периодичности косинуса, равны нулю. Выполнив остающуюся выкладку, получим $2\pi Rr^2$.

Поверхностный же интеграл второго типа

$$2\iint\limits_{(S)}(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy,$$

*) Для облегчения запоминания формулы Стокса укажем, что первое слагаемое в интеграле справа — то же, что и в формуле Грина, а остальные получаются из него круговой перестановкой букв x, y, z и P, Q, R.

) Если положить $x-r=r\cos t$, $y=r\sin t$, то геометрический смысл параметра t ясен; подставляя эти выражения в уравнение сферы, найдем и зависимость z от t. При изменении t от 0 до 2π кривая описывается **против часовой стрелки, если смотреть **сверху**.

распространенный на верхнюю сторону упомянутой поверхности, преобразуем сначала в интеграл первого типа:

$$2\iint\limits_{(S)} [(y-z)\cos\lambda + (z-x)\cos\mu + (x-y)\cos\nu]\, dS.$$

Так как

$$\cos\lambda = \frac{x-R}{R}, \quad \cos\mu = \frac{y}{R}, \quad \cos\nu = \frac{z}{R},$$

то, подставляя эти выражения, произведем упрощение и сведем искомый интеграл к следующему:

$$2\iint\limits_{(S)} (z-y)\, dS.$$

В силу симметрии поверхности относительно плоскости xz, интеграл $\iint\limits_{(S)} y\, dS$ оказывается нулем. Остающийся же интеграл снова преобразуем к интегралу второго типа:

$$2\iint\limits_{(S)} z\, dS = 2\iint\limits_{(S)} \frac{z}{\cos\nu}\, dx\, dy = 2R\iint\limits_{(S)} dx\cdot dy = 2\pi Rr^2.$$

374. Приложение формулы Стокса к исследованию криволинейных интегралов в пространстве. Пусть в открытой области (T) заданы функции P, Q, R, непрерывные со своими производными

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}; \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}; \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}.$$

С помощью формулы Стокса легко установить *условия, необходимые и достаточные для того, чтобы обращался в нуль интеграл*

$$\int\limits_{(L)} P\, dx + Q\, dy + R\, dz, \tag{12}$$

взятый по любому простому замкнутому контуру (L), *лежащему в* (T).

Впрочем, для того чтобы возможно было использовать формулу Стокса, нужно наперед наложить на трехмерную область (T), к которой относятся наши рассмотрения, естественное ограничение. Именно нужно потребовать, чтобы, *какова бы ни была простая кусочно-гладкая замкнутая кривая* (L) в области (T), *на нее можно было «натянуть» кусочно-гладкую (самонепересекающуюся) поверхность* (S), *имеющую* (L) *своим контуром и также целиком содержащуюся в* (T). Это свойство аналогично свойству односвязности плоской области; при наличии его пространственную область (T) также называют («поверхностно»*)) односвязной. Упомянем для примера, что тело, ограниченное

*) В отличие от другого типа односвязности пространственной области, о котором речь будет ниже [n° 381].

двумя концентрическими сферическими поверхностями, будет в этом смысле односвязным, а тор — нет.

Пусть же область (T) будет (поверхностно) односвязной. Натянув на контур (L), как сказано, поверхность (S), заменим по формуле Стокса криволинейный интеграл (12) поверхностным интегралом

$$\iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx.$$

Для обращения его в нуль, очевидно, достаточны условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}. \tag{Б}$$

Эти условия в то же время и необходимы, в чем легко убедиться (наподобие n° **348**), если рассматривать плоские фигуры (S), лежащие в плоскостях, параллельных поочередно той или иной из координатных плоскостей.

Читатель видит, что мы использовали здесь формулу Стокса совершенно так же, как в n° **348** с аналогичными целями была использована формула Грина.

Легко показать, что те же *условия* (Б) *будут необходимыми и достаточными для того, чтобы интеграл*

$$\int\limits_{(AB)} P\,dx+Q\,dy+R\,dz \tag{13}$$

не зависел от формы кривой (AB), *соединяющей любые две точки* A *и* B *области* (T), в предположении, конечно, что эта область (поверхностно) односвязна.

Необходимость устанавливается так же, как и в плоском случае [n° **349**]. Что же касается достаточности, то, как и там, легко исчерпывается случай, когда две кривые (AIB) и $(AIIB)$, соединяющие точки A и B, кроме них общих точек не имеют. Если же это не так, и взятые кривые пересекаются, то здесь вопрос оказывается более простым, чем в плоском случае: в связной пространственной области (T) всегда можно взять такую третью кривую $(AIIIB)$, которая уже не пересекалась бы ни с одной из прежних *). Тогда



Черт. 57.

$$\int\limits_{(AIB)}=\int\limits_{(AIIIB)},\qquad \int\limits_{(AIIB)}=\int\limits_{(AIIIB)},$$

*) Как показывает черт. 57, это не всегда может быть сделано в плоском случае!

откуда и следует, что всегда

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIB)} .$$

С этим исследованием можно связать и *вопрос о том, будет ли дифференциальное выражение*

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{14}$$

(полным) дифференциалом от некоторой функции трех переменных. Необходимость условий (Б) для того, чтобы это было так, проверяется непосредственно, как и в n°**350**. Достаточность доказывается, тоже как в плоском случае, непосредственным построением первообразной — в виде криволинейного интеграла

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

[ср. (8) в n°**350**], который — при соблюдении условий (Б) — не зависит от пути. Итак, для области (T) указанного типа *условия* (Б) *оказываются необходимыми и достаточными для того, чтобы выражение* (14) *было точным дифференциалом.*

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

375. Задача о вычислении массы тела. Пусть дано некоторое тело (V), заполненное массами, и в каждой его точке $M(x, y, z)$ известна плотность

$$\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z)$$

распределения этих масс. Требуется определить всю массу m тела.

Для решения этой задачи разложим тело (V) на ряд частей:

$$(V_1),\ (V_2),\ \ldots,\ (V_n)$$

и выберем в пределах каждой из них по точке

$$M_i(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i).$$

Примем приближенно, что в пределах части (V_i) плотность постоянна и равна как раз плотности $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ в выбранной точке. Тогда масса m_i этой части приближенно выразится так:

$$m_i \doteq \rho(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\, V_i,$$

масса же всего тела будет

$$m \doteq \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\, V_i.$$

Если диаметры всех частей стремятся к нулю, то в пределе это приближенное равенство становится точным, так что

$$m = \lim \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\, V_i, \tag{1}$$

и задача решена.

Мы видим, что решение задачи и здесь привело к рассмотрению предела своеобразной суммы — типа интегральных сумм раз-

личного вида, с которыми мы многократно имели дело на протяжении всего курса.

Подобного рода пределы приходится часто рассматривать в механике и физике; они получили название *тройных интегралов*. В принятых для них обозначениях полученный выше результат запишется так:

$$m = \iiint\limits_{(V)} \rho(x, y, z)\, dV. \tag{2}$$

Теории тройных интегралов и их важным приложениям посвящена, в основном, настоящая глава. Так как целый ряд предложений, установленных для двойных интегралов, переносится вместе с их доказательствами на случай тройных интегралов, то мы обычно будем довольствоваться лишь формулировкой этих предложений, предоставляя читателю перефразировать прежние доказательства.

376. Тройной интеграл и условие его существования. При построении общего определения нового интегрального образования — тройного интеграла основную роль играет понятие объема тела, наподобие того как понятие площади плоской фигуры лежало в основе определения двойного интеграла.

С понятием объема мы уже знакомы по первому тому и сталкивались с ним не раз. Условие существования объема для данного тела заключается в том, чтобы ограничивающая его поверхность имела объем, равный нулю [n° 197]. Только такие поверхности мы и будем рассматривать, так что существование объемов во всех нужных нам случаях тем самым обеспечивается. Отметим, что, в частности, к этому классу поверхностей относятся гладкие и кусочно-гладкие поверхности.

Пусть теперь в некоторой пространственной области (V) задана функция $f(x, y, z)$. Разобьем эту область с помощью сети поверхностей на конечное число частей (V_1), (V_2), ..., (V_n), имеющих соответственно объемы V_1, V_2, ..., V_n. В пределах i-го элемента (V_i) возьмем по произволу точку (ξ_i, η_i, ζ_i), значение функции в этой точке $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ умножим на объем V_i и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i.$$

Предел I этой суммы, при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех областей (V_i), и называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ в области (V). Он обозначается символом

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Конечный предел подобного вида может существовать только для ограниченной функции; для такой функции вводятся, кроме интегральной суммы σ, еще суммы Дарбу:

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i V_i, \qquad S=\sum_{i=1}^{n} M_i V_i,$$

где

$$m_i=\inf_{(V_i)}\{f\}, \qquad M_i=\sup_{(V_i)}\{f\}.$$

Обычным путем устанавливается, что для существования интеграла необходимо и достаточно условие

$$\lim (S-s)=0$$

или

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \omega_i V_i=0,$$

где $\omega_i=M_i-m_i$ есть колебание функции f в области (V_i). [Заметим, что при существовании интеграла обе суммы s, S также имеют его своим пределом.]

Отсюда непосредственно следует, что *всякая непрерывная функция f интегрируема.*

Можно несколько расширить эти условия, а именно: *интегрируема всякая ограниченная функция, все разрывы которой лежат на конечном числе поверхностей с нулевым объемом.* [Ср. n° 339 и 340.]

377. Свойства интегрируемых функций и тройных интегралов. Достаточно перечислить эти свойства [доказываются они аналогично изложенному в n° 341].

1°. *Существование и величина тройного интеграла не зависят от значений, принимаемых функцией вдоль конечного числа поверхностей с нулевым объемом.*

2°. *Если* $(V)=(V')+(V'')$, *то*

$$\iiint\limits_{(V)} f\,dV=\iiint\limits_{(V')} f\,dV+\iiint\limits_{(V'')} f\,dV,$$

причем из существования интеграла слева вытекает уже существование интегралов справа, и обратно.

3°. *Если* $k=\text{const}$, *то*

$$\iiint\limits_{(V)} kf\,dV=k\iiint\limits_{(V)} f\,dV,$$

причем из существования интеграла справа следует и существование интеграла слева.

4°. *Если в области* (V) *интегрируемы две функции* f *и* g, *то интегрируема и функция* $f \pm g$, *причем*

$$\iiint\limits_{(V)} (f \pm g)\, dV = \iiint\limits_{(V)} f\, dV \pm \iiint\limits_{(V)} g\, dV.$$

5°. *Если для интегрируемых в области* (V) *функций* f *и* g *выполняется неравенство* $f \leqslant g$, *то*

$$\iiint\limits_{(V)} f\, dV \leqslant \iiint\limits_{(V)} g\, dV.$$

6°. *В случае интегрируемости функции* f *интегрируема и функция* $|f|$, *и имеет место неравенство*

$$\left| \iiint\limits_{(V)} f\, dV \right| \leqslant \iiint\limits_{(V)} |f|\, dV.$$

7°. *Если интегрируемая в* (V) *функция* f *удовлетворяет неравенству*

$$m \leqslant f \leqslant M,$$

то

$$mV \leqslant \iiint\limits_{(V)} f\, dV \leqslant MV.$$

Иными словами, имеет место теорема о среднем значении

$$\iiint\limits_{(V)} f\, dV = \mu V \qquad (m \leqslant \mu \leqslant M).$$

В случае непрерывности функции f эту формулу можно написать в виде

$$\iiint\limits_{(V)} f\, dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\, V, \tag{3}$$

где $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ есть некоторая точка области (V).

Далее легко распространяется на трехмерный случай и содержание n° **342**: так же, как и там, устанавливается понятие функции от (трехмерной) области, в частности, аддитивной функции. Важным примером такой функции (см. 2°) является интеграл по переменной области (v):

$$\Phi((v)) = \iiint\limits_{(v)} f\, dv. \tag{4}$$

Вводится, аналогично прежнему, понятие производной функции $\Phi((v))$ по области в данной точке M; так называется предел

$$\lim_{(v)\to M} \frac{\Phi((v))}{v}$$

при стягивании в точку M содержащей ее области (v).

8°. *Если подинтегральная функция непрерывна, то производной по области в точке* $M(x, y, z)$ *от интеграла* (4) *будет как раз значение подинтегральной функции в этой точке,* т. е. $f(M) = f(x, y, z)$.

Таким образом, при сделанном предположении интеграл (4) служит для функции f в некотором смысле «первообразной».

378. Вычисление тройного интеграла. И здесь дело сводится к вычислению повторных интегралов, составляющихся из интегралов низшей кратности. Предположим функцию $f(x, y, z)$ непрерывной в рассматриваемой области, чем обеспечено существование всех встречающихся ниже интегралов. Остановимся сначала на случае, когда тело, по которому интегрируется функция $f(x, y, z)$, представляет собой прямоугольный параллелепипед

$$(T) = [a, b; c, d; e, f],$$

проектирующийся на плоскость yz в прямоугольник

$$(R) = [c, d; e, f].$$

Тогда имеем, прежде всего,

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dT = \int_a^b dx \iint\limits_{(R)} f(x, y, z)\,dR. \tag{5}$$

Заменяя двойной интеграл повторным, окончательно приведем вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех простых интегралов:

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z)\,dz. \tag{6}$$

Наоборот, если первые два интеграла объединить в двойной интеграл, то получим

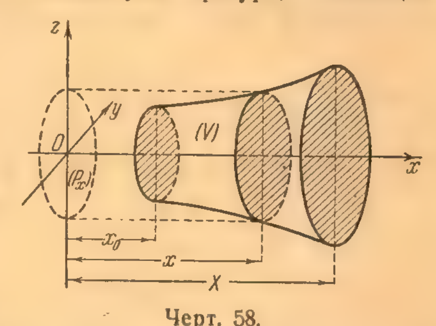
$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dT = \iint\limits_{(Q)} dx\,dy \int_e^f f(x, y, z)\,dz, \tag{7}$$

где $(Q) = [a, b; c, d]$. Во всех этих случаях, как само собою разумеется, роли переменных x, y, z можно переставлять.

Предположим теперь, что тройной интеграл берется по телу (V), отличному от прямоугольного параллелепипеда. Пусть это тело содержится между плоскостями $x = x_0$ и $x = X$ и каждою парал-

лельною им плоскостью, отвечающею фиксированному значению $x\ (x_0 \leqslant x \leqslant X)$, пересекается по некоторой фигуре, имеющей площадь; через (P_x) обозначим ее проекцию на плоскость yz (черт. 58). Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \int\limits_{x_0}^{X} dx \iint\limits_{(P_x)} f(x, y, z)\, dy\, dz. \quad (5a)$$



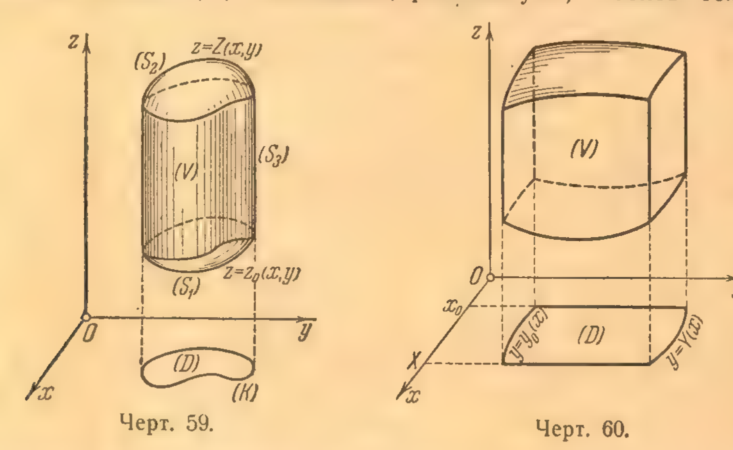
Черт. 58.

Это — аналог формулы (5).

Пусть, далее, тело (V) представляет собой «цилиндрический брус», ограниченный снизу и сверху, соответственно, поверхностями

$$z = z_0(x, y) \quad \text{и} \quad z = Z(x, y),$$

проектирующимися на плоскость xy в некоторую фигуру D, ограниченную кривою (K) с площадью, равной нулю; с боков тело (V)



Черт. 59.

Черт. 60.

ограничено цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z, и с кривою (K) в роли направляющей (черт. 59). Тогда, аналогично формуле (7), имеем

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dV = \iint\limits_{(D)} dx\, dy \int\limits_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \quad (7a)$$

Если область (D) представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную двумя кривыми (черт. 60)

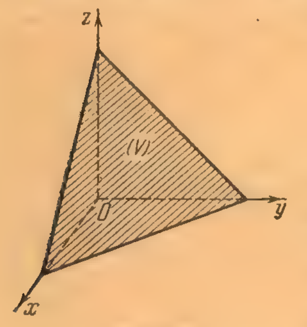
$$y = y_0(x) \quad \text{и} \quad y = Y(x) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant X)$$

и прямыми $x=x_0$, $x=X$, то тело (V) подходит под оба типа, рассмотренных выше. Заменяя двойной интеграл — то ли в формуле (5а), то ли в формуле (7а) — повторным, получим

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int\limits_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (6a)$$

Эта формула обобщает формулу (6).

Как и в простейшем случае, который был рассмотрен выше, и здесь, наряду с указанными формулами, имеют место и им подобные, получающиеся из них перестановкой переменных x, y, z.



Черт. 61.

Примеры. 1) Вычислить интеграл

$$I = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3},$$

распространенный на тетраедр (V), ограничиваемый плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $x+y+z=1$ (черт. 61).

Решение. Проекцией тела на плоскость xy служит треугольник, образованный прямыми $x=0$, $y=0$ и $x+y=1$. Ясно, что границами изменения x служат числа 0 и 1, а при постоянном x в этих границах переменная y изменяется от 0 до $1-x$. Если же фиксированы и x, и y, то точка может перемещаться по вертикали от плоскости $z=0$ до плоскости $x+y+z=1$; таким образом, пределами изменения z будут 0 и $1-x-y$.

По формуле (6а) имеем

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Последовательно вычисляем интегралы, начиная с внутреннего:

$$\int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right];$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right] dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\right),$$

наконец,

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

2) Вычислить интеграл Дирихле

$$D=\iiint\limits_{\substack{x,\,y,\,z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1}} x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dx\,dy\,dz,$$

предполагая $p,\ q,\ r\geqslant 1$ (черт. 61).

Если воспользоваться формулой вида (5а), поставив интегрирование по z на место интегрирования по x, то получим:

$$D=\int_0^1 z^{r-1}\,dz \iint\limits_{\substack{x,\,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1-z}} x^{p-1}\,y^{q-1}\,dx\,dy.$$

Заменой переменных $x=(1-z)\xi,\ \ y=(1-z)\eta$ сведем двойной интеграл к уже известному [n° 344, 3)]

$$(1-z)^{p+q}\iint\limits_{\substack{\xi,\,\eta\geqslant 0\\ \xi+\eta\leqslant 1}} \xi^{p-1}\eta^{q-1}\,d\xi\,d\eta=(1-z)^{p+q}\cdot\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)},$$

так что

$$D=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\int_0^1 z^{r-1}(1-z)^{p+q}\,dz.$$

Наконец, воспользовавшись известным выражением функции В через Г [n° 311, (12)], окончательно найдем:

$$D=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}$$

— результат, совершенно аналогичный полученному в n° 344, 3). На деле он имеет место и при более общем предположении, именно: $p>0,\ q>0,\ r>0$. Но при обращении подинтегральной функции в бесконечность (например, при $0<p<1$ это произойдет на плоскости $x=0$) интеграл уже оказывается «несобственным» и требует дополнительного предельного перехода. Определение такого интеграла строится так же, как и в случае двойного интеграла [см. n° 344, 4), замечание].

379. Механические приложения. Естественно, что все геометрические и механические величины, связанные с распределением масс в пределах некоторого тела (V) в пространстве, в принципе выражаются на этот раз *тройными* интегралами, распространенными на тело (V). Здесь также проще всего пользоваться принципом суммирования бесконечно малых элементов [ср. n° 204—208 и 345].

Обозначим через ρ плотность распределения масс в произвольной точке тела (V); она является функцией от координат точки; эту функцию мы будем всегда предполагать непрерывной. Суммируя элементы массы $dm=\rho\,dV=\rho\,dx\,dy\,dz$, для величины всей массы будем иметь

$$m=\iiint\limits_{(V)}\rho\,dV=\iiint\limits_{(V)}\rho\,dx\,dy\,dz \tag{8}$$

[ср. n° 375].

Исходя из элементарных статических моментов

$$dK_{yz}=x\,dm=x\rho\,dV,\quad dK_{zx}=y\,dm=y\rho\,dV,$$
$$dK_{xy}=z\,dm=z\rho\,dV,$$

найдем самые статические моменты:

$$K_{yz}=\iiint\limits_{(V)} x\rho\,dV,\quad K_{zx}=\iiint\limits_{(V)} y\rho\,dV,\quad K_{xy}=\iiint\limits_{(V)} z\rho\,dV,\tag{9}$$

а по ним — и координаты центра тяжести:

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{(V)} x\rho\,dV}{m},\quad \eta=\frac{\iiint\limits_{(V)} y\rho\,dV}{m},\quad \zeta=\frac{\iiint\limits_{(V)} z\rho\,dV}{m}.\tag{10}$$

В случае однородного тела, $\rho=\mathrm{const}$, получаем проще:

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{(V)} x\,dV}{V},\quad \eta=\frac{\iiint\limits_{(V)} y\,dV}{V},\quad \zeta=\frac{\iiint\limits_{(V)} z\,dV}{V}.$$

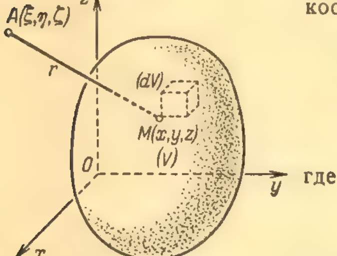
Сами собой понятны и формулы для моментов инерции относительно осей координат:

$$I_x=\iiint\limits_{(V)}(y^2+z^2)\rho\,dV,\quad I_y=\iiint\limits_{(V)}(z^2+x^2)\rho\,dV,$$
$$I_z=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\rho\,dV\tag{11}$$

или относительно координатных плоскостей:

$$I_{yz}=\iiint\limits_{(V)} x^2\rho\,dV,\quad I_{zx}=\iiint\limits_{(V)} y^2\rho\,dV,\quad I_{xy}=\iiint\limits_{(V)} z^2\rho\,dV.\tag{12}$$

Наконец, пусть массы, заполняющие тело (V), притягивают точку $A(\xi,\eta,\zeta)$ (массы 1) по закону Ньютона (черт. 62). Сила притяжения со стороны элемента $dm=\rho\,dV$ массы имеет на оси координат проекции *)



Черт. 62.

$$dF_x=\frac{x-\xi}{r^3}\rho\,dV,\quad dF_y=\frac{y-\eta}{r^3}\rho\,dV,$$
$$dF_z=\frac{z-\zeta}{r^3}\rho\,dV,$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

есть расстояние элемента (или точки, в которой мы считаем сосредоточенной его массу) от

*) См. вторую сноску на стр. 316.

точки A. Суммируя, для проекций полной силы $\vec{F}$ притяжения на оси координат получим

$$F_x = \iiint\limits_{(V)} \frac{x-\xi}{r^3} \rho\, dV, \quad F_y = \iiint\limits_{(V)} \frac{y-\eta}{r^3} \rho\, dV, \quad F_z = \iiint\limits_{(V)} \frac{z-\zeta}{r^3} \rho\, dV. \tag{13}$$

Аналогично определяется и потенциал нашего тела в точке:

$$W = \iiint \frac{\rho\, dV}{r}. \tag{14}$$

Если точка A лежит вне тела, то все эти интегралы оказываются собственными. В этом случае можно дифференцировать интеграл W по любой из переменных ξ, η, ζ под знаком интеграла на основании соображений, сходных с теми, которыми мы пользовались в отношении простых интегралов [n° 297]. В результате мы и получим, что

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z. \tag{15}$$

В случае же, когда точка A сама принадлежит телу (V), в этой точке $r = 0$, и подинтегральные функции в (13) и (14) вблизи нее перестают быть ограниченными. Впрочем, эти интегралы, как «несобственные», все же существуют, и для них выполняются основные соотношения (15).

Замечание. В n° 345 для статических моментов однородного цилиндрического бруса (при $\rho = 1$) мы имели формулы:

$$K_{yz} = \iint\limits_{(P)} zx\, dx\, dy, \quad K_{zx} = \iint\limits_{(P)} zy\, dx\, dy, \quad K_{xy} = \frac{1}{2} \iint\limits_{(P)} z^2\, dx\, dy.$$

Они, конечно, вытекают из общих формул (9).

Имеем, например,

$$K_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z\, dV = \iint\limits_{(P)} dx\, dy \int\limits_0^{z(x,y)} z\, dz;$$

но

$$\int\limits_0^{z(x,y)} z\, dz = \frac{1}{2} z^2 \Bigg|_{z=0}^{z=z(x,y)},$$

что и приводит к требуемому результату.

В n° 345 взамен вычисления последнего интеграла были привлечены соображения из области механики (относительно статического момента элементарного столбика).

§ 2. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО

380. Формула Остроградского. В теории двойных интегралов мы ознакомились с формулой Грина, связывающей двойной интеграл по плоской области с криволинейным интегралом по контуру области. Ее аналогом в теории тройных интегралов служит формула Остроградского, связывающая тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом по границе области.

Рассмотрим тело (V) (черт. 59), ограниченное гладкими поверхностями

$$\left.\begin{array}{ll}(S_1) & z=z_0(x,\ y)\\ (S_2) & z=Z(x,\ y)\end{array}\right\}(z_0\leqslant Z)$$

и цилиндрической поверхностью (S_3), образующие которой параллельны оси z. Направляющей здесь служит кусочно-гладкая замкнутая кривая (K) (с нулевой площадью) на плоскости xy, ограничивающая область (D) — проекцию тела (V) на эту плоскость.

Допустим, что в области (V) определена некоторая функция $R(x,\ y,\ z)$, непрерывная вместе со своей производной $\frac{\partial R}{\partial z}$ во всей области (V), включая ее границу. Тогда имеет место формула

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(S)}R\,dx\,dy,\tag{1}$$

причем (S) есть поверхность, ограничивающая тело, и интеграл справа распространен на внешнюю ее сторону.

Действительно, по формуле (7а) n° **378**

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(D)}dx\,dy\int\limits_{z_0(x,\ y)}^{Z(x,\ y)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dz=$$

$$=\iint\limits_{(D)}R(x,\ y,\ Z(x,\ y))\,dx\,dy-\iint\limits_{(D)}R(x,\ y,\ z_0(x,\ y))\,dx\,dy.$$

Если ввести в рассмотрение поверхностные интегралы, то, в силу формул (3) и (3а) n° **372**,

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(S_2)}R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy+\iint\limits_{(S_1)}R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy,$$

причем первый из интегралов справа распространен на верхнюю сторону поверхности (S_2), а второй — на нижнюю сторону поверхности (S_1). Равенство не нарушится, если мы прибавим к правой его части интеграл

$$\iint\limits_{(S_3)}R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy,$$

распространенный на внешнюю сторону поверхности (S_3), так как этот интеграл равен нулю [n° **372**, (5)]. Объединяя все три поверхностных интеграла в один, мы и придем к формуле (1), которая представляет собой частный случай формулы Остроградского.

Легко понять, что формула (1) верна для более широкого класса тел, которые могут быть разложены на части изученного

типа. Можно доказать также, что формула (1) справедлива вообще для тел, ограниченных произвольными кусочно-гладкими поверхностями.

Аналогично формуле (1) имеют место и формулы:

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz, \tag{2}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} Q\,dz\,dx, \tag{3}$$

если функции P и Q непрерывны в области (V) вместе со своими производными $\frac{\partial P}{dx}$ и $\frac{\partial Q}{\partial y}$.

Сложив все три формулы (1), (2), (3), мы и придем к общей *формуле Остроградского:*

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{4}$$

Она выражает общего вида поверхностный интеграл второго типа, распространенный на внешнюю сторону замкнутой поверхности, через тройной интеграл, взятый по телу, ограниченному этой поверхностью.

Если привлечь к рассмотрению поверхностные интегралы первого типа, то получим другой, весьма употребительный и легко запоминаемый вид формулы Остроградского:

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$
$$= \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\,dS, \tag{5}$$

где λ, μ, ν суть углы, составленные в н е ш н е й нормалью к поверхности (S) с координатными осями.

З а м е ч а н и е I. Иногда формулу Остроградского связывают с именем Гаусса. У Гаусса встречаются лишь очень частные случаи этой формулы, причем каждый раз наново дается их вывод. В общей форме (4) эта формула впервые была дана в 1828 г. Остроградским, который применил ее к вопросу о распространении тепла в твердом теле.

З а м е ч а н и е II. Формулы Грина, Стокса и Остроградского объединены одной идеей: они выражают интеграл, распространенный на некоторый геометрический образ, через интеграл, взятый по границе этого образа. При этом формула Грина относится

к случаю двумерного пространства, формула Стокса — также к случаю двумерного, но «кривого» пространства, а формула Остроградского — к случаю трехмерного пространства.

На основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

мы тоже можем смотреть, как на некоторый аналог этих формул — для одномерного пространства.

381. Некоторые примеры приложения формулы Остроградского. 1) *Представление объема тела поверхностными интегралами.* Аналогично n° 347, и в формуле (4) можно различными способами подобрать функции P, Q, R так, чтобы подинтегральное выражение в тройном интеграле оказалось равным е д и н и ц е, так что этот интеграл сведется к объему V тела (V). Таким образом, объем V представится в виде поверхностного интеграла, распространенного на ограничивающую тело (V) поверхность (S). Так, полагая в (4) поочередно

$$P = x,\ Q = 0,\ R = 0; \quad P = 0,\ Q = y,\ R = 0; \quad P = 0,\ Q = 0,\ R = z,$$

придем к формулам:

$$V = \iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} y\,dz\,dx = \iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy, \tag{6}$$

причем все интегралы взяты по в н е ш н е й стороне поверхности (S). Удобной является более симметричная формула, отвечающая

$$P = \frac{1}{3}x, \quad Q = \frac{1}{3}y, \quad R = \frac{1}{3}z;$$

она имеет вид

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

или — если перейти к интегралу первого типа —

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} (x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu)\,dS$$

(здесь $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ означают направляющие косинусы в н е ш н е й нормали $\vec{n}$ к поверхности).

Можно представить эту формулу еще иначе: если рассмотреть вектор $\vec{r}$, соединяющий начало с переменной точкой поверхности, с проекциями x, y, z на оси координат, то выражение в скобках может быть переписано в виде

$$r \cdot \cos(\vec{r}, \vec{n})$$

и, окончательно,

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} r \cdot \cos(\vec{r}, \vec{n})\,dS.$$

В такой форме этот результат встречается у Гаусса еще в 1813 г.

2) *Равновесие жесткой замкнутой поверхности.* Докажем, что жесткая замкнутая поверхность, подвергнутая всестороннему равномерному давлению, остается в равновесии.

С этой целью установим, что равны нулю *главный вектор* и *главный момент* (относительно какой-либо точки) всей системы приложенных к поверхности сил.

Выделим элемент (dS) поверхности. Если через $p = \text{const}$ обозначить давление, т. е. силу, действующую на единицу площади, то элементарная сила, действующая на (dS) по нормали к этому элементу, будет иметь проекции на оси

$$-p\cos\lambda\, dS, \quad -p\cos\mu\, dS, \quad -p\cos\nu\, dS \tag{7}$$

(знак минус поставлен потому, что давление направлено внутрь поверхности, а λ, μ, ν суть углы внешней нормали с координатными осями).

Проекции R_x, R_y, R_z главного вектора получаются из проекций (7) элементарных сил суммированием их:

$$R_x = -p\iint\limits_{(S)} \cos\lambda\, dS, \quad R_y = -p\iint\limits_{(S)} \cos\mu\, dS, \quad R_z = -p\iint\limits_{(S)} \cos\nu\, dS.$$

Но все эти интегралы равны нулю, что видно из формулы Остроградского, если положить в ней

$$P = 1, \quad Q = R = 0; \quad Q = 1, \quad P = R = 0; \quad R = 1, \quad P = Q = 0.$$

Итак, *главный вектор давлений равен нулю.*

Для определения главного момента системы элементарных сил, скажем, относительно начала координат, просуммируем проекции на оси моментов этих элементарных сил:

$$p(z\cos\mu - y\cos\nu)\, dS, \quad p(x\cos\nu - z\cos\lambda)\, dS, \quad p(y\cos\lambda - x\cos\mu)\, dS\ {}^{*)}.$$

Таким образом, проекции главного момента давлений относительно начала будут:

$$L_x = p\iint\limits_{(S)} (z\cos\mu - y\cos\nu)\, dS, \qquad L_y = p\iint\limits_{(S)} (x\cos\nu - z\cos\lambda)\, dS,$$

$$L_z = p\iint\limits_{(S)} (y\cos\lambda - x\cos\mu)\, dS.$$

Если в формуле Остроградского взять $P = 0$, $Q = pz$, $R = -py$, то получим, что $L_x = 0$. Так же легко установить, что и $L_y = L_z = 0$. *Главный момент давлений* (относительно начала) *равен нулю.* Этим и завершается доказательство.

3) *Закон Архимеда.* Известно, что давление жидкости на погруженную в нее площадку направлено по нормали к площадке и равно весу столба жидкости, основанием которого служит эта площадка, а высотой — глубина погружения площадки. Допустим теперь, что в жидкость погружено твердое тело (V); на каждый элемент (dS) его поверхности (S) по указанному закону

---

*) Напомним, что если слагающие силы по осям суть X, Y, Z и приложена она в точке (x, y, z), то момент силы относительно точки (ξ, η, ζ) имеет следующие проекции на оси:

$$L_x = (y-\eta)Z - (z-\zeta)Y, \quad L_y = (z-\zeta)X - (x-\xi)Z,$$
$$L_z = (x-\xi)Y - (y-\eta)X.$$

давит жидкость. Требуется определить равнодействующую элементарных давлений и ее точку приложения.

Для решения этой задачи выберем координатную систему, совместив плоскость xy со свободной поверхностью жидкости, а ось z направив вертикально вниз.

Пусть удельный вес жидкости равен ρ, а глубина погружения элемента (dS) есть z; тогда испытываемое этим элементом давление будет

$$\rho z\, dS,$$

а проекции его на оси:

$$-\rho z \cos\lambda\, dS, \quad -\rho z \cos\mu\, dS, \quad -\rho z \cos\nu\, dS.$$

В таком случае для проекций главного вектора на оси имеем:

$$R_x = -\rho \iint\limits_{(S)} z \cos\lambda\, dS, \quad R_y = -\rho \iint\limits_{(S)} z \cos\mu\, dS,$$

$$R_z = -\rho \iint\limits_{(S)} z \cos\nu\, dS.$$

С помощью формулы Остроградского, как и в предыдущей задаче, легко получить

$$R_x = R_y = 0, \quad R_z = -\rho \iiint\limits_{(V)} dV = -\rho V.$$

Таким образом, *главный вектор давлений направлен вертикально вверх и равен весу вытесненной телом жидкости.*

Рассмотрим теперь моменты элементарных сил относительно центра тяжести $C(\xi, \eta, \zeta)$ тела (здесь и дальше имеется в виду центр тяжести *геометрического* тела, при равномерном распределении масс; он может не совпадать с центром тяжести физического тела). Составляющие элементарных моментов по осям будут

$$\rho z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]\, dS, \quad \rho z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]\, dS,$$
$$\rho z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]\, dS,$$

а для составляющих главного момента (относительно точки C) получим:

$$L_x = \rho \iint\limits_{(S)} z[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]\, dS,$$

$$L_y = \rho \iint\limits_{(S)} z[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda)]\, dS,$$

$$L_z = \rho \iint\limits_{(S)} z[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]\, dS.$$

Применяя к первому интегралу формулу Остроградского, найдем

$$L_x = \rho \iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial z(z-\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z(y-\eta)}{\partial z}\right] dV =$$

$$= \rho \iiint\limits_{(V)} (\eta - y)\, dV = \rho\left[\eta V - \iiint\limits_{(V)} y\, dV\right] = 0,$$

ибо интеграл $\iiint\limits_{(V)} y\,dV$ есть статический момент тела относительно плоскости xz и равен ηV. Аналогично устанавливается, что $L_y=0$; непосредственно получается, наконец, что и $L_z=0$.

Итак, *главный момент давлений относительно центра тяжести тела равен нулю.* Сопоставляя это утверждение с ранее доказанным предложением о главном векторе, приходим к такому заключению: *на тело, погруженное в жидкость, со стороны последней действует сила, равная весу жидкости, вытесненной телом; эта сила приложена к центру тяжести (геометрического) тела и направлена вертикально вверх.*

4) *Исследование поверхностных интегралов.* Пусть в некоторой открытой области (T) трехмерного пространства заданы непрерывные функции P, Q, R. Взяв любую замкнутую поверхность (S), лежащую в этой области и ограничивающую некоторое тело, рассмотрим поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\,dS. \qquad (8)$$

Какому условию должны удовлетворять функции P, Q, R, *чтобы интеграл* (8) *всякий раз оказывался равным нулю?*

Эта задача аналогична задаче об обращении в нуль криволинейного интеграла по замкнутому контуру [n° 348 и 374], которая легко разрешалась с помощью формулы Грина или Стокса. Здесь же мы прибегнем к формуле Остроградского, предполагая, конечно, что для функций P, Q, R существуют и непрерывны те производные, которые фигурируют в этой формуле.

Однако для того чтобы иметь право преобразовать интеграл (8) по формуле Остроградского, необходимо и в настоящем случае наложить некоторое ограничение непосредственно на основную область (T). Именно, нужно потребовать, чтобы, *лишь только простая замкнутая поверхность* (S), *ограничивающая тело* (V), *принадлежит области* (T), *то и это тело также целиком содержится в области* T. Область, обладающую этим свойством, называют («пространственно») односвязной (ср. n° 374). Сущность этого типа односвязности состоит в отсутствии «дыр», хотя бы и точечных; по отношению к телу, не простирающемуся в бесконечность, можно было бы попросту потребовать, чтобы его границей служила одна единственная замкнутая поверхность [ср. n° 348]. Поэтому, например, в отличие от сказанного по поводу «поверхностной» односвязности в n° 374 здесь тор будет односвязным телом, а полая сфера — нет.

Формула Остроградского сразу приводит к искомому условию:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \qquad (В)$$

Достаточность его очевидна, а необходимость легко доказывается с помощью дифференцирования тройного интеграла по области [n° 377, 8°].

Аналогично случаю криволинейных интегралов, вопрос об обращении в нуль интеграла по замкнутой поверхности оказывается равносильным вопросу о независимости интеграла по незамкнутой поверхности, «натянутой» на данный контур, от формы поверхности. Останавливаться на этом не станем.

§ 3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

382. Преобразование пространственных областей. Идеи, развитые в n° **352** в связи с преобразованием плоских областей, естественно, переносятся и на случай пространственных областей.

Пусть имеем пространство, отнесенное к системе прямоугольных координат xyz, и другое пространство с системой координат $\xi\eta\zeta$. Рассмотрим две замкнутые области (D) и (Δ) в этих пространствах, ограниченные соответственно поверхностями (S) и (Σ), которые мы всегда будем предполагать кусочно-гладкими. Допустим, что эти области связаны между собой взаимно однозначным непрерывным соответствием, которое осуществляется формулами:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(\xi, \eta, \zeta),\\ y&=y(\xi, \eta, \zeta),\\ z&=z(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

При этом, необходимо, *точкам поверхности* (Σ) *отвечают именно точки поверхности* (S), и наоборот.

Пусть функции (1) имеют в области (Δ) непрерывные частные производные; тогда и функциональный определитель

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$$

также является непрерывной функцией в (Δ). Мы и здесь [ср. n° **352**] будем считать, что *этот определитель всегда отличен от нуля, сохраняя постоянный знак.*

Тогда формулы (1) преобразуют кусочно-гладкую поверхность, содержащуюся в области (Δ), в кусочно-гладкую же поверхность, лежащую в (D), и обратно.

Числа ξ, η, ζ, однозначно характеризующие положение точки в пространстве xyz, называются *криволинейными координатами* этой точки. Точки пространства xyz, для которых одна из этих координат сохраняет постоянное значение, образуют *координатную поверхность.* Всего будет существовать три семейства таких координатных поверхностей; через каждую точку области (D) проходит по одной поверхности каждого семейства.

Впрочем, все это будет так лишь в предположении строгой однозначности соответствия между областями (D) и (Δ). На практике эта однозначность часто нарушается.

Примеры. 1) *Цилиндрические координаты* представляют соединение полярных координат в плоскости xy с обычной декартовой аппликатой z (черт. 63). Формулы, связывающие их с декартовыми, имеют вид

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta, \quad z=z. \qquad (2)$$

Эти формулы отображают область

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

на все пространство xyz. Отметим, однако, что прямая $\rho = 0$, $z = z$ отображается в одну точку $(0, 0, z)$; этим нарушается взаимная однозначность соответствия.

Координатные поверхности в рассматриваемом случае будут:

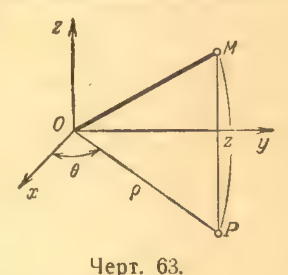
(а) $\rho = \text{const}$ — цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси z; направляющими для них служат окружности на плоскости xy с центром в начале;

(б) $\theta = \text{const}$ — полуплоскости, проходящие через ось z;

(в) $z = \text{const}$ — плоскости, параллельные плоскости xy.

Функциональный определитель преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$



Черт. 63.

Исключая случай $\rho = 0$, он сохраняет положительный знак.

2) *Сферические координаты*, называемые иначе *полярными координатами в пространстве*, связаны с декартовыми формулами

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi,$$

где

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

Геометрический смысл величин r, φ, θ ясен из черт. 64: r есть радиус-вектор OM, соединяющий начало (полюс) с данной точкой M, φ — угол, составляемый этим радиусом-вектором с осью z (полярной осью); θ — угол, составляемый с осью x проекцией $OP = r\sin\varphi$ радиуса-вектора OM на плоскость xy (перпендикулярную к полярной оси).

Черт. 64.

В этом случае мы снова сталкиваемся с нарушением взаимной однозначности соответствия: плоскость $r = 0$ пространства $r\varphi\theta$ отображается в начало координат $x = y = z = 0$, прямая $\varphi = 0\,(\pi)$, $r = r$ отображается в одну точку

$$x = y = 0, \quad z = r.$$

Координатные поверхности составляют три семейства:

(а) $r = \text{const}$ — концентрические сферы с центром в начале координат;

(б) $\varphi = \text{const}$ — круговые конусы, осью которых служит ось z;

(в) $\theta = \text{const}$ — полуплоскости, проходящие через ось z.

Определитель этого преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi.$$

Он сохраняет знак плюс, за исключением упомянутых выше случаев, когда $r = 0$, либо $\varphi = 0\,(\pi)$, и определитель обращается в нуль.

383. Выражение объема в криволинейных координатах. При предположениях и обозначениях n° 382 поставим себе задачей выразить объем (ограниченного) тела (D) в пространстве xyz тройным интегралом, распространенным на соответствующее тело (Δ) в пространстве $\xi\eta\zeta$ *).

Искомый объем выражается прежде всего поверхностным интегралом второго типа [см. n° 380, (6)]:

$$D=\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy,$$

распространенным на в н е ш н ю ю сторону поверхности (S). Отсюда постараемся перейти к обыкновенному двойному интегралу.

Будем исходить из параметрических уравнений поверхности (Σ):

$$\xi=\xi(u, v),\quad \eta=\eta(u, v),\quad \zeta=\zeta(u, v), \tag{3}$$

предполагая, что параметры изменяются в некоторой области (E) на плоскости uv. Заменим в формулах преобразования (1) ξ, η, ζ выражениями (3); тогда мы получим, очевидно, параметрические уравнения поверхности (S):

$$x=x(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v))=x(u, v),$$
$$y=y(u, v),\quad z=z(u, v).$$

Полагая

$$C=\frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

по формуле (7) n° 372 [см. замечание] имеем

$$D=\pm\iint\limits_{(E)} zC\,du\,dv.$$

Так как x, y зависят от u, v через посредство переменных ξ, η, ζ, то, по известному свойству функциональных определителей [n° 326]

$$C=\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}+\frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)}\frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)}+\frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)}\frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}.$$

Подставляя выражение C в полученный выше интеграл, найдем

$$D=\pm\iint\limits_{(E)} z\left[\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}+\frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)}\frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)}+\right.$$
$$\left.+\frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)}\frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}\right]du\,dv. \tag{4}$$

---

*) Как и в n° 353 мы и здесь предполагаем дополнительно существование и непрерывность частных производных, скажем,

$$x''_{\xi\eta},\ x''_{\eta\xi},\ \ldots,\ y''_{\xi\eta},\ y''_{\eta\xi},\ \ldots;$$

это облегчает доказательство, хотя не существенно для верности самого результата.

Сопоставим этот интеграл с поверхностным интегралом второго типа, распространенным на **внешнюю** сторону поверхности $(\sum)$:

$$\iint\limits_{(\Sigma)} z\left[\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta + \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)}\, d\eta\, d\zeta + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)}\, d\zeta\, d\xi\right]. \tag{5}$$

Если его преобразовать, исходя из параметрических уравнений (3), к обыкновенному двойному интегралу, по формуле, аналогичной формуле (7) n° **372**, то придем как раз к интегралу (4). Единственное различие между этими интегралами может заключаться лишь в **знаке**.

Наконец, от интеграла (5) по формуле Остроградского можно перейти к тройному интегралу по области (Δ):

$$D = \pm \iiint\limits_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi}\left[z\frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[z\frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[z\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right]\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Подинтегральное выражение равно

$$\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial z}{\partial\zeta}\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} +$$

$$+ z\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} + \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right].$$

Сумма, стоящая здесь в первой строке, равна функциональному определителю

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta} \end{vmatrix},$$

в чем легко убедиться, разлагая этот определитель по элементам последней строки; сумма же в квадратных скобках, как показывает непосредственное вычисление, равна нулю *).

---

*) Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} = \frac{\partial^2 x}{\partial\eta\,\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\zeta} + \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\zeta\,\partial\xi} - \frac{\partial^2 x}{\partial\zeta\,\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\,\partial\xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} = \frac{\partial^2 x}{\partial\zeta\,\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi} + \frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\zeta} - \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\zeta\,\partial\eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\eta} + \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial\eta\,\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\zeta}.$$

Складывая эти равенства почленно, получим справа тождественно нуль.

Таким образом, приходим к формуле

$$D = \pm \iiint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Если вспомнить, что по предположению функциональный определитель сохраняет знак, который он сообщает и интегралу, то станет ясно (так как мы здесь считаем $D > 0$), что знак перед интегралом должен совпадать со знаком определителя. Это дает нам право переписать полученный результат в окончательной форме:

$$D = \iiint\limits_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{6}$$

или, обозначая функциональный определитель для краткости через $J(\xi, \eta, \zeta)$:

$$D = \iiint\limits_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta. \tag{6*}$$

Подинтегральное выражение

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi \, d\eta \, d\zeta = |J(\xi, \eta, \zeta)| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

обычно называют *элементом объема в криволинейных координатах*.

Если применить к формуле (6*) теорему о среднем, то получим соотношение

$$D = |J(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})| \, \Delta, \tag{7}$$

где $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ есть некоторая точка из области (Δ), а Δ — объем этой области.

Отсюда легко вывести, что при стягивании области Δ к точку (ξ, η, ζ) будем иметь [ср. n° 377, 8°]:

$$|J(\xi, \eta, \zeta)| = \lim \frac{D}{\Delta},$$

так что абсолютная величина функционального определителя есть коэффициент растяжения пространства $\xi\eta\zeta$ (в данной его точке) при преобразовании его в пространство xyz.

Замечание. Формула (6) [(6*)] выведена при известных предположениях — взаимно однозначное и непрерывное соответствие между областями (D) и (Δ) и т. д. Однако, как и в n° 354, 4°, можно показать, что нарушение этих условий в отдельных точках или вдоль отдельных линий и поверхностей не мешает формуле быть верной, лишь бы функциональный определитель оставался ограниченным.

384. Геометрический вывод. Вывод формулы (6) можно построить, следуя Остроградскому, и на чисто геометрических соображениях [ср. n° **355**]. Бесконечно малому прямоугольному параллелепипеду в пространстве $\xi\eta\zeta$ с измерениями $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ сопоставляется элементарное тело в пространстве xyz между координатными поверхностями «ξ» и «$\xi+d\xi$», «η» и «$\eta+d\eta$», «ζ» и «$\zeta+d\zeta$», которое приближенно можно рассматривать, как косоугольный параллелепипед. Его объем равен ушестеренному объему тетраедра с вершинами в точках:

$$P_1(x,\ y,\ z),\quad P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi,\quad y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi,\quad z+\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi\right)$$

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta,\quad y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta,\quad z+\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta\right)$$

$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta,\quad y+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta,\right.$$

$$\left.z+\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta+\frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta\right),$$

и по известной из аналитической геометрии формуле выражается (по абсолютной величине) определителем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta & \frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta & \frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta & \frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta \end{vmatrix} = \frac{D(x,\ y,\ z)}{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)}d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Суммируя эти отдельные «элементы объема», приходим к формуле (6).

Таким образом, *существо дела и здесь в том, что для определения объема тела оно разлагается на элементы не с помощью системы взаимно перпендикулярных плоскостей, а с помощью сетки координатных поверхностей.*

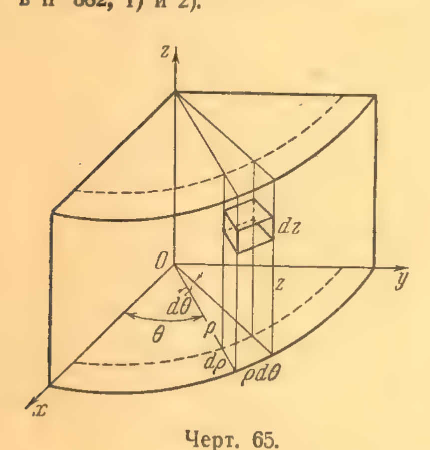
В простых случаях выражение для «элемента объема» в криволинейных координатах может быть получено непосредственно.

Для примера в случае цилиндрических координат рассмотрим элементарную область (в пространстве xyz), ограниченную двумя цилиндрическими поверхностями радиусов ρ и $\rho+d\rho$, двумя горизонтальными плоскостями, лежащими на высотах z и $z+dz$, и двумя полуплоскостями, проходящими через ось z и наклоненными к плоскости xz под углами θ и $\theta+d\theta$ (черт. 65). Считая приближенно эту область прямоугольным параллелепипедом, без труда находим, что измерения его суть $d\rho$, $\rho\, d\theta$ и dz, так что объем его равен $\rho\, d\rho\, d\theta\, dz$, а определитель, представляющий отношение этого объема к объему $d\rho\, d\theta\, dz$ элементарного параллелепипеда в пространстве $\rho\theta z$, равен ρ.

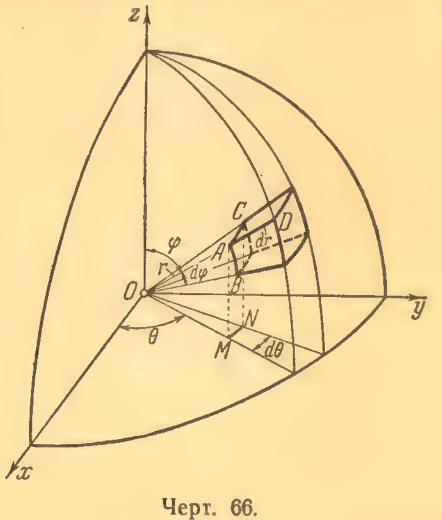
Аналогично, в случае сферических координат рассмотрим элементарную область (в пространстве xyz), ограниченную сферами радиусов r

и $r+dr$, конусами φ и $\varphi+d\varphi$ и полуплоскостями θ и $\theta+d\theta$ (черт. 66). И эту область можно принять за прямоугольный параллелепипед с измерениями $AD=dr$, $AB=r\,d\varphi$ и, наконец, AC. Так как дуга AC равна своей проекции MN, а последняя описана радиусом $OM=r\sin\varphi$ и отвечает центральному углу $d\theta$, то $AC=r\sin\varphi\,d\theta$. В силу этого объем рассматриваемой области равен $r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$, а функциональный определитель есть $r^2\sin\varphi$.

Оба эти результата, найденных из элементарно-геометрических соображений, согласуются со сказанным в n° 382, 1) и 2).



Черт. 65.



Черт. 66.

385. Замена переменных в тройных интегралах. С помощью выражения объема в криволинейных координатах нетрудно установить и общую формулу замены переменных в тройных интегралах.

Пусть между областями (D) и (Δ) пространств xyz и $\xi\eta\zeta$ существует соответствие, охарактеризованное в n° 382. Считая соблюденными все условия, при которых была выведена формула (6), мы покажем теперь, что имеет место следующее равенство:

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta,\zeta),\,y(\xi,\eta,\zeta),\,z(\xi,\eta,\zeta))\,|J(\xi,\eta,\zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (8)$$

$$\left(\text{где } J(\xi,\eta,\zeta)=\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right)$$

вполне аналогичное формуле замены переменных в двойных интегралах. При этом функцию $f(x,y,z)$ мы предполагаем непрерывной. Таким образом, существование обоих интегралов в равенстве (8) не вызывает сомнений; нужно установить лишь самое равенство.

Для доказательства поступаем так же, как и в n° 356. Разложив кусочно-гладкими поверхностями области (D) и (Δ) на (соответст-

вующие друг другу) элементарные части (D_i) и (Δ_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$, применим к каждой паре областей (D_i), (Δ_i) формулу (7); мы получим

$$D_i = |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)|\,\Delta_i, \tag{9}$$

где $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$ есть некоторая точка области Δ_i, не зависящая от нашего выбора. Возьмем соответствующую точку $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ области (D_i), т. е. положим

$$\bar{x}_i = x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad \bar{y}_i = y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad \bar{z}_i = z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \tag{10}$$

и составим интегральную сумму для первого из интегралов (8):

$$\sigma = \sum_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\,D_i.$$

Подставив сюда вместо $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ выражения (10), а вместо D_i — выражение (9), придем к сумме

$$\sigma = \sum_i f(x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \quad z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i))\,|J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)|\,\Delta_i,$$

которая, очевидно, уже является интегральной суммой для второго из интегралов (8).

Устремим к нулю диаметры областей (Δ_i), вследствие чего в силу непрерывности соответствия устремятся к нулю и диаметры областей (D_i). Сумма σ должна стремиться одновременно к обоим интегралам, откуда и следует требуемое равенство.

Как и в случае двойных интегралов, формула (8) имеет место в ряде случаев, когда сформулированные выше предположения нарушаются в отдельных точках или вдоль конечного числа линий и поверхностей.

386. Примеры. 1) Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z.$$

Решение. Тело расположено симметрично относительно плоскостей yz и zx, ибо x и y входят в уравнение только в квадратах. Далее, поскольку левая часть уравнения всегда положительна, необходимо и $z \geqslant 0$, т. е. все тело лежит вверх от плоскости xy. Эти замечания позволяют ограничиться вычислением объема четверти нашего тела, лежащей в первом октанте.

Наличие в уравнении выражения $x^2+y^2+z^2$ подсказывает нам переход к сферическим координатам. Подставляя в уравнение поверхности выражения

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = r\cos\varphi,$$

придем к уравнению поверхности в сферических координатах:

$$r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}.$$

Так как первый октант характеризуется неравенствами

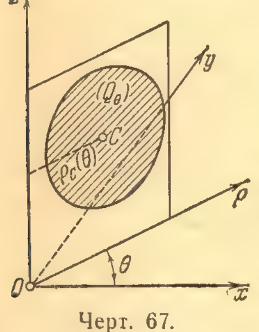
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то, учитывая значение функционального определителя $J = r^2 \sin\varphi$ [n° 382, 2)], будем иметь

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2 \sin\varphi\, dr = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

2) Применение *цилиндрических координат* к вычислению объема тела приводит к интересной формуле.

Рассмотрим тело (V), ограниченное кусочно-гладкой поверхностью, и предположим, что исходящая из оси z полуплоскость, отвечающая $\theta = \text{const}$, пересекает тело по некоторой плоской фигуре (Q_θ) при изменении θ от α до β (черт. 67). Тогда



Черт. 67.

$$V = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \int_\alpha^\beta d\theta \iint\limits_{(Q_\theta)} \rho\, d\rho\, dz,$$

причем фигуру (Q_θ) удобно отнести к прямоугольной системе координат ρz, вращающейся вместе с упомянутой полуплоскостью вокруг оси z*).

Теперь легко видеть, что двойной интеграл $\iint\limits_{(Q_\theta)} \rho\, d\rho\, dz$ представляет статический момент фигуры (Q_θ) относительно оси z, который равен произведению площади $Q(\theta)$ этой фигуры на расстояние $\rho_C(\theta)$ ее центра тяжести C от оси z:

$$\iint\limits_{(Q_\theta)} \rho\, d\rho\, dz = Q(\theta)\cdot \rho_C(\theta).$$

Подставляя это в выражение для объема, придем к окончательной формуле:

$$V = \int_\alpha^\beta Q(\theta)\cdot \rho_C(\theta)\, d\theta.$$

Эта формула была указана П. П. Кусковым. Она особенно удобна для определения объема тел, получающихся при винтовом движении плоской фигуры (постоянной или деформирующейся), как то: винтовых нарезок, пружин и т. п.

Если тело (V) есть попросту тело вращения неизменной фигуры (Q), не пересекающей оси z, вокруг этой оси, то $Q = \text{const}$, $\rho_C = \text{const}$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, и формула принимает вид

$$V = Q\cdot 2\pi\rho_C.$$

Она выражает известную теорему Гульдина, гласящую, что *объем тела вращения плоской фигуры около не пересекающей ее оси равен про-*

*) Вместо того, чтобы тождественную с ней фигуру относить к неподвижной плоскости ρz в пространстве $\rho\theta z$.

изведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры. Таким образом, формула Кускова является естественным обобщением этой классической теоремы и, наоборот, легко может быть из нее получена.

3) Найти притяжение, испытываемое произвольной точкой A пространства (массы 1) со стороны однородной сферы, с плотностью ρ.

Пусть радиус сферы равен R, а расстояние $OA = a$. Оси координат расположим так, чтобы точка A находилась на положительной части оси z. Тогда

$$F_z = \iiint\limits_{(V)} \frac{\rho (z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Перейдя к сферическим координатам, найдем

$$F_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\rho r^2 (r\cos\varphi - a)\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}}.$$

Но, определяя притяжение сферическим слоем [n° **370**, 1)], мы уже нашли значение двойного интеграла

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(r\cos\varphi - a)\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a < r \\ -\dfrac{4\pi}{a^2} & \text{при} \quad a > r \end{cases}$$

В таком случае при $a > R$

$$F_z = -\frac{4\pi\rho}{a^2}\int_0^R r^2\, dr = -\frac{4}{3}\pi R^3\rho\,\frac{1}{a^2},$$

а при $a < R$

$$F_z = -\frac{4\pi\rho}{a^2}\int_0^a r^2\, dr = -\frac{4}{3}\pi\rho a.$$

В то же время, очевидно, $F_x = F_y = 0$. Итак, во всех случаях притяжение направлено к центру сферы.

При этом точка, находящаяся вне *сферы* ($a > R$), *испытывает со стороны последней такое же притяжение, какое испытывала бы, если бы в центре сферы была сосредоточена вся ее масса* $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$. С другой стороны, так как по отношению к точке, лежащей внутри сферы ($a < R$), притяжение не зависит от R и имеет такую же величину, как и в случае $R = a$, то ясно, что *наружный сферический слой не оказывает на внутреннюю точку никакого действия.*

Следует отметить, что при $a > R$ (когда притягиваемая точка A лежит вне сферы) подинтегральная функция сохраняет непрерывность, и выкладки ни в каких пояснениях не нуждаются. Иначе обстоит дело при $a \leqslant R$ (когда точка A лежит внутри сферы или на ее поверхности). В этом случае, именно в окрестности точки A, подинтегральная функция перестает быть ограниченной, и интеграл нужно понимать как несобственный. После замены переменных особенность исчезает; это обстоятельство позволяет и установить существование интеграла, и оправдать все выкладки.

387. Исторические замечания. Тройные интегралы впервые появляются в одной работе Лагранжа 1773 г. (опубликованной двумя годами позже), которая в основном была посвящена теории притяжения. Определив для силы притяжения точки «элементарным параллелепипедом» $dx\,dy\,dz$ ее проекции на три координатные оси, Лагранж занимается их интегрированием, которое он предполагает «распространенным на все точки тела». Здесь Лагранж и дает определение тройного интеграла, который (как двойной у Эйлера, см. n° 359), получается повторным интегрированием; при этом ясно указывается, между какими пределами надлежит брать последовательно каждый из трех простых интегралов. Одновременно Лагранж рассматривает тройной интеграл как сумму и даже обозначает его иной раз знаком Σ.

Убедившись в том, что (даже в случае сферы) интегрирования оказываются трудными, Лагранж указывает, что для облегчения их следовало бы использовать другие переменные, и ставит в общем виде задачу замены переменных в тройном интеграле. Используя зависимости между дифференциалами старых и новых переменных:

$$dx = A\,dp + B\,dq + C\,dr,$$
$$dy = D\,dp + E\,dq + F\,dr,$$
$$dz = G\,dp + H\,dq + I\,dr$$

(A, B, C, ... — данные функции от p, q, r), Лагранж пытается найти попросту выражение старого элемента объема $dx\,dy\,dz$ через новый $dp\,dq\,dr$ и приходит — с помощью неубедительных рассуждений — к равенству

$$dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} dp\,dq\,dr\,^{*)},$$

которое вообще неверно [ср. n° 359]. Мы уже упоминали, что на ошибочность рассуждений Лагранжа в 1838 г. указал Остроградский; Остроградский также геометрически осмыслил то выражение, которое *подставляется* вместо старого «элемента объема» $dx\,dy\,dz$, *не будучи ему равным*. Подробнее об этом см. n° 384.

§ 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

388. Скаляры и векторы. Применение интегрального исчисления к вопросам математической физики и механики часто удобнее проводить в векторной форме. Поэтому читателю полезно ознакомиться с некоторыми основными понятиями векторного анализа, которые приводят к векторной интерпретации интегральных образований и связывающих их формул интегрального исчисления.

Мы предполагаем, что читатель уже знаком с понятием скаляра или скалярной величины, которая вполне характеризуется своим численным значением (как, например, объем, масса, плотность, температура), и с понятием вектора или векторной величины, которая для полного своего определения требует еще указания на направление (перемещение, скорость, ускорение, сила и т. п.). Говоря о векторе, мы, как обычно, будем представлять себе изображающий его направленный отрезок. Условимся обозначать векторы буквами со стрелками над ними $\vec{A}$, $\vec{r}$, $\vec{v}$, ... ; те же буквы без стрелок: A, r, v, ... будут означать длины векторов:

$$A = |\vec{A}|, \qquad r = |\vec{r}|, \qquad v = |\vec{v}|, \ \ldots ,$$

---

*) Привычного нам обозначения определителя Лагранж не употребляет и пишет определитель в развернутом виде.

а буквы со значками: A_x, r_y, v_n, ... — их проекции, соответственно, на оси x, y, n, ... Проекции A_x, A_y, A_z вектора $\vec{A}$ на координатные оси вполне его определяют и по длине (численному значению) и по направлению.

Мы считаем также, что читатель владеет и основными сведениями из векторной алгебры. Ограничимся напоминанием, что *скалярным произведением* векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется скаляр (число)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos(\vec{A}, \vec{B}),$$

которое через проекции на оси выражается так:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \qquad (1)$$

Положим впредь в основу вращение против часовой стрелки и, следовательно, правую систему координат [n° **362**, замечание]. Тогда *векторное произведение* векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ есть вектор с длиною $AB\sin(\vec{A}, \vec{B})$, перпендикулярный к обоим сомножителям и направленный в ту сторону, с которой вращение от $\vec{A}$ к $\vec{B}$ (на угол, меньший 180°) кажется происходящим против часовой стрелки; его обозначают через $\vec{A} \times \vec{B}$. Проекции векторного произведения на оси будут

$$A_yB_z - A_zB_y, \qquad A_zB_x - A_xB_z, \qquad A_xB_y - A_yB_x, \qquad (2)$$

если (напомним это) в основу положена правая система координат.

389. Скалярное и векторное поля. Если с каждой точкой M определенной пространственной области (которая может охватывать и все пространство) связана некоторая скалярная или векторная величина, то говорят, что задано *поле* этой величины, соответственно, *скалярное* или *векторное*. В ближайших номерах нам все время придется иметь дело с такими полями.

Примером скалярного поля может служить поле температуры или электрического потенциала. Если положение точки M определять ее координатами по отношению к некоторой произвольно выбранной координатной системе $Oxyz$, то задание поля скалярной величины U равносильно просто заданию числовой функции $U(x, y, z)$. Мы всегда будем предполагать, что эта функция имеет непрерывные частные производные по всем переменным. Если эти производные не обращаются одновременно в нуль, то уравнение

$$U(x, y, z) = C \qquad (C = \text{const})$$

определяет некоторую поверхность (без особых точек), вдоль которой величина U сохраняет постоянное значение; такая поверхность называется *поверхностью уровня*. Вся рассматриваемая область заполнена этими поверхностями, так что через каждую точку ее проходит одна и только одна поверхность уровня. Ясно, что поверхности уровня между собой не пересекаются.

Примером векторного поля может служить силовое поле или поле скоростей; подобные поля нам уже встречались. Если положить в основу некоторую систему координат $Oxyz$, то задание поля векторной величины $\vec{A}$ может быть осуществлено путем задания ее проекций на оси

$$A_x(x, y, z), \qquad A_y(x, y, z) \qquad A_z(x, y, z) \qquad (3)$$

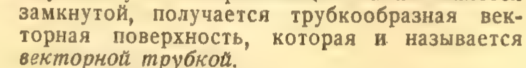
как функций от координат точки M, с которой величина $\vec{A}$ связана. И эти функции мы будем предполагать имеющими непрерывные производные. При изучении векторного поля важную роль играют *векторные линии*; векторной линией называется кривая, направление которой в каждой ее точке M

совпадает с направлением вектора $\vec{A}$, отвечающего этой точке. Если вспомнить [n° 212], что направляющие косинусы касательной к кривой пропорциональны дифференциалам dx, dy, dz, то получится, что векторная линия характеризуется равенствами

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}.$$

В предположении, что вектор $\vec{A}$ не обращается в нуль, можно доказать, опираясь на «теорему существования» из теории систем дифференциальных уравнений, что вся рассматриваемая область заполняется векторными линиями, причем через каждую точку ее проходит одна и только одна такая линия. Векторные линии между собой не пересекаются.

Иногда приходится рассматривать поверхности, составленные из векторных линий; их называют *векторными поверхностями*. Векторная поверхность характеризуется тем, что в каждой ее точке M соответствующий вектор $\vec{A}(M)$ лежит в плоскости, касательной к поверхности в этой точке (или тем, что проекция A_n вектора $\vec{A}$ на нормаль $\vec{n}$ к поверхности во всех ее точках равна нулю). Если взять в рассматриваемой области какую-нибудь линию, отличную от векторных линий, и через каждую ее точку провести векторную линию, то геометрическое место этих линий и даст нам векторную поверхность. В случае, если упомянутая «направляющая» линия является замкнутой, получается трубкообразная векторная поверхность, которая и называется *векторной трубкой*.



Черт. 68.

390. Производная по заданному направлению. Градиент. Пусть задано скалярное поле $U(M)$. Во многих вопросах представляет интерес «скорость изменения» этой функции точки или «производная» ее *по любому заданному направлению*. Уточним это понятие.

На произвольной направленной прямой (или о с и) l возьмем постоянную точку M_0 и переменную точку M (черт. 68); под M_0M будем разуметь в е л и ч и н у направленного отрезка от M_0 до M, т. е. длину его со знаком плюс, если направление M_0M совпадает с направлением оси l, и со знаком минус — в противном случае.

Пусть M неограниченно приближается к M_0. *П р о и з в о д н о й от функции $U(M)$ в точке M_0 п о н а п р а в л е н и ю l называется предел*

$$\lim_{M\to M_0}\frac{U(M)-U(M_0)}{M_0M};$$

он обозначается символом:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}. \qquad (4$$

Эта производная и характеризует «скорость изменения» названной функции в точке M_0 по направлению l.

Положим в основу некоторую координатную систему $Oxyz$ и допустим, что функция координат

$$U(M)=U(x,\ y,\ z)$$

имеет в рассматриваемой области непрерывные частные производные по каждой из переменных. Тогда, как мы докажем, производная (4) существует и выражается формулой

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma, \tag{5}$$

где все производные вычислены в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ суть направляющие косинусы оси l. Если положить $M_0M=t$, то координаты переменной точки M оси выразятся так:

$$x=x_0+t\cos\alpha,\qquad y=y_0+t\cos\beta,\qquad z=z_0+t\cos\gamma.$$

Искомая производная будет производной сложной функции от t

$$U(x_0+t\cos\alpha,\quad y_0+t\cos\beta,\quad z_0+t\cos\gamma)$$

при $t=0$. По правилу дифференцирования сложной функции ее величина как раз и представится формулой (5).

Введем вектор $\vec{g}$, с проекциями на оси

$$\frac{\partial U}{\partial x},\qquad \frac{\partial U}{\partial y},\qquad \frac{\partial U}{\partial z}; \tag{6}$$

его называют градиентом величины U и обозначают символом

$$\vec{g}=\operatorname{grad} U.$$

Если вернуться к формуле (5) и через $\vec{\lambda}$ обозначить орт (единичный вектор), проведенный в направлении l, то ее можно переписать и так:

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\operatorname{grad} U\cdot\vec{\lambda}=\operatorname{grad}_l U.$$

Отсюда видно, что наибольшего значения эта производная достигает в том случае, когда направление l совпадает с направлением градиента, причем это наибольшее значение равно

$$|\operatorname{grad} U|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Это позволяет нам теперь, взамен приведенного выше формального определения градиента, использующего координатную систему, дать другое: *градиентом скалярной величины U называется вектор, который по численному значению и по направлению характеризует наибольшую скорость изменения величины U.* Здесь уже координатная система не упоминается вовсе, чем и выявляется фактическая независимость понятия градиента от ее выбора.

Легко усмотреть, что направление градиента совпадает с направлением нормали к поверхности уровня $U(x, y, z)=C$, проходящей через данную точку.

Итак, скалярное поле $U(M)$ порождает векторное поле градиента $\operatorname{grad} U$.

Гамильтон*) ввел в рассмотрение символический вектор с «проекциями»

$$\frac{\partial}{\partial x},\qquad \frac{\partial}{\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial z}$$

---

*) Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865) — английский математик.

на оси координат, который он назвал «наблой» и обозначил через ∇. Пользуясь этим обозначением, можно написать, что

$$\operatorname{grad} U = \nabla U.$$

Действительно, если упомянутый «вектор» формально умножить на скаляр U, то и получится вектор с проекциями (6)!

Примеры. 1) Обозначая через $\vec{r}$ радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий некоторую постоянную точку O с переменной точкой M пространства, а через r — его длину, положим

$$U(M) = \varphi(r),$$

где φ — какая-нибудь скалярная функция от положительного скалярного аргумента r, имеющая производную постоянного знака. Поверхностями уровня, очевидно, будут сферы радиуса r с центром в O, так что направление градиента совпадает с радиальным или прямо противоположно ему, смотря по тому, будет ли $\varphi'(r) > 0$ или < 0. Легко видеть, что

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

В частности,

$$\operatorname{grad} \frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3}\vec{r} \qquad (c = \text{const}).$$

Если поместить в точке O массу m и рассмотреть поле ньютоновского притяжения, то его напряжение $\vec{F}$ в точке M будет

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

и, таким образом,

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \frac{m}{r}.$$

Вопрос о том, может ли данное векторное поле быть рассматриваемо как поле градиента для некоторой скалярной величины, имеет большую важность. По существу он для нас не нов; мы вернемся к нему ниже [n° 393].

2) Рассмотрим поле температуры U. Взяв элемент поверхности (dS) с определенным образом направленной нормалью n, подсчитаем количество dQ тепла, протекшего через этот элемент в направлении n за бесконечно малый промежуток времени dt. Тепло течет от более нагретых частей тела или среды к менее нагретым, и притом тем быстрее, чем быстрее убывает температура. Обычно принимают, что упомянутое выше элементарное количество тепла dQ пропорционально dS, dt и, наконец, $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$. Обозначая через $k > 0$ коэффициент пропорциональности («коэффициент внутренней теплопроводности» для данного места), можно написать

$$dQ = -k\, dS\, dt \frac{\partial U}{\partial n};$$

в согласии со сказанным выше количество тепла dQ оказывается положительным именно в том случае, когда $\frac{\partial U}{\partial n}$ отрицательно, т. е. когда в направлении n температура U убывает.

Если ввести так называемый вектор потока тепла

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} U,$$

то выражение для dQ можно переписать короче:

$$dQ = dS\, dt\, q_n.$$

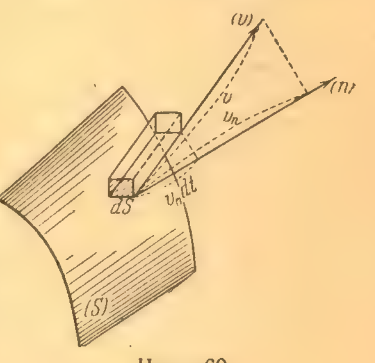
391. Поток вектора через поверхность. Пусть теперь задано некоторое векторное поле $\vec{A}(M)$, т. е. заданы три функции (3). Возьмем поверхность (S) и, выбрав определенную ее сторону, обозначим через $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ направляющие косинусы соответственно направленной нормали n. Тогда *поверхностный интеграл*

$$\iint_{(S)} (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu)\, dS$$

называют потоком вектора $\vec{A}$ через поверхность (S) в указанную сторону. Если тот же интеграл написать в виде

$$\iint_{(S)} A_n\, dS,$$

то станет вполне ясной его независимость от выбора координатной системы.



Черт. 69.

Обратимся к примерам.

1) Самое название «поток» связано с некоторой гидромеханической задачей. Рассмотрим движение жидкости в пространстве; в общем случае мы не предполагаем его стационарным, так что скорость движения $\vec{v}$ зависит не только от положения точки M, к которой она относится, но и от времени t. Поставим себе задачей вычислить количество жидкости, протекающее через поверхность (S) в определенную сторону за бесконечно малый промежуток времени dt. Через элемент (dS) поверхности протечет количество жидкости, которое заполнит собой цилиндр с основанием dS и высотой $v_n dt$ (черт. 69), где нормаль n предполагается направленной именно в выбранную сторону *). Если через ρ обозначить плотность жидкости, которая также может зависеть и от положения точки и от времени, то масса протекшей через dS жидкости будет

$$\rho\, dS v_n\, dt.$$

Для всей поверхности (S) получим

$$dt \iint_{(S)} \rho v_n\, dS.$$

Количество же протекшей жидкости Q, отнесенное к единице времени, выразится интегралом

$$Q = \iint_{(S)} \rho v_n\, dS; \tag{7}$$

читатель узнает в нем «поток вектора» $\rho\vec{v}$ через поверхность (S)!

---

*) Ср. сноску на стр. 231.

Замечание. Так как движение жидкости мы не предположили установившимся, то на деле величина Q сама, вообще говоря, зависит от времени и точнее может быть названа *скоростью* возрастания количества протекшей через (S) жидкости в рассматриваемый момент времени.

Подобное же замечание можно было бы повторить и о «протекшем через (S) количестве тепла, отнесенном к единице времени» [см. следующий пример]: всё это величины, имеющие характер скорости.

2) Аналогично можно говорить и о потоке тепла. Легко видеть, что [при обозначениях n° **390**, 2)] за время dt через поверхность (S) протечет количество тепла, равное

$$dt \iint\limits_{(S)} q_n \, dS.$$

Если отнести количество протекшего тепла к единице времени, то получим

$$\iint\limits_{(S)} q_n \, dS,$$

т. е. «поток вектора» $\overrightarrow{q}$ через поверхность (S). Отсюда и название вектора

$$\overrightarrow{q} = -k \operatorname{grad} U$$

— «вектор потока тепла».

392. Формула Остроградского. Дивергенция. Возвращаясь к общему случаю векторного поля $\overrightarrow{A}$, рассмотрим тело (V), ограниченное замкнутой поверхностью (S); через n будем обозначать внешнюю нормаль к поверхности. Тогда по формуле Остроградского [n° **380**, (5)], если положить в ней $P = A_x$, $Q = A_y$, $R = A_z$, можно поток вектора $\overrightarrow{A}$ через поверхность (S) вовне преобразовать в тройной интеграл:

$$\iint\limits_{(S)} A_n \, dS = \iint\limits_{(S)} (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu) \, dS =$$

$$= \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV.$$

Стоящее под знаком тройного интеграла выражение называется дивергенцией (или расходимостью) вектора $\overrightarrow{A}$ и обозначается символом

$$\operatorname{div} \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (8)$$

Таким образом, формула Остроградского перепишется в виде

$$\iint\limits_{(S)} A_n \, dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \overrightarrow{A} \, dV, \qquad (9)$$

в каком она чаще всего и применяется.

Введенная только что величина, дивергенция, есть скаляр; но ее определение формально связано с выбором координатной системы. Для того

чтобы освободиться от этого недостатка, поступим следующим образом. Окружим точку M каким-нибудь телом (V) с поверхностью (S) и напишем формулу (9); если обе части разделить на объем V тела и перейти к пределу, стягивая тело (V) в точку M, то [n° 377, 8°] справа как раз и получится $\operatorname{div}\vec{A}$ в точке M. Итак,

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{(V)\to M} \frac{\iint\limits_{(S)} A_n\,ds}{V}; \tag{10}$$

это равенство также может служить определением дивергенции, причем в этой форме определение уже не зависит от выбора координатной системы.

На этот раз векторное поле $\vec{A}$ порождает скалярное поле дивергенции $\operatorname{div}\vec{A}$.

Заметим, что определение (8) дивергенции может быть с помощью символического вектора ∇ Гамильтона записано так:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \nabla\cdot\vec{A};$$

это станет ясно, если вспомнить выражение (1) скалярного произведения двух векторов.

Пример. Остановимся на движении несжимаемой жидкости ($\rho = 1$) при наличии источников или стоков. *Производительностью источников*, заключенных внутри замкнутой поверхности (S), называется количество вытекающей через (S) жидкости, отнесенное к единице времени, т. е. поток вектора-скорости $\vec{v}$

$$\iint\limits_{(S)} v_n\,dS$$

[см. n° 391, 1)]. Если источники распределены непрерывно по рассматриваемой области, то вводится понятие *плотности источников*. Так называют предельное значение производительности источников в теле (V), окружающем точку M, рассчитанное на единицу объема, т. е.

$$\lim_{(V)\to M} \frac{\iint\limits_{(S)} v_n\,dS}{V}.$$

Но, как мы только что видели [см. (10)], этот предел равен $\operatorname{div}\vec{v}$; итак, $\operatorname{div}\vec{v}$ и есть плотность источников.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для теплового потока при наличии источников тепла, лишь вместо вектора-скорости пришлось бы взять вектор потока тепла.

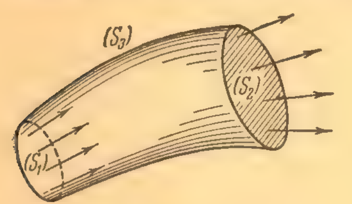
Если $\operatorname{div}\vec{A} = 0$, то поле называется *соленоидальным*, т. е. *трубчатым*, от греческого слова σολέν = трубка. Это условие — в предположении, что занимаемая полем часть пространства односвязна (пространственно), равносильно требованию, чтобы *поток вектора $\vec{A}$ через произвольную замкнутую и ограничивающую тело поверхность вовне был равен нулю:*

$$\iint\limits_{(S)} A_n\,dS = 0$$

[n° 381, (B)]. Рассмотрим теперь векторную трубку (черт. 70) между двумя произвольными ее сечениями (S_1) и (S_2); поверхность самой трубки обозначим через (S_3). Тогда по сказанному

$$\left\{\iint\limits_{(S_1)} + \iint\limits_{(S_2)} + \iint\limits_{(S_3)}\right\} A_n\,dS = 0,$$

причем нормаль во всех случаях направлена вовне. Вдоль поверхности (S_3), очевидно, $A_n = 0$ [n° 389]; если в сечении (S_1) изменить направление нормали так, чтобы оно было согласно с направлением нормали в (S_2), то придем к равенству



Черт. 70.

$$\iint\limits_{(S_1)} A_n\,dS = \iint\limits_{(S_2)} A_n\,dS.$$

Таким образом мы получаем замечательное свойство соленоидального поля: *поток соленоидального вектора через поперечные сечения векторной трубки сохраняет постоянную величину;* ее называют интенсивностью векторной трубки.

Если вернуться к приведенной выше гидромеханической интерпретации векторного поля, то окажется, что в случае несжимаемой жидкости и при отсутствии источников ($\operatorname{div}\vec{A} = 0$) расход жидкости через поперечное сечение векторной трубки имеет одно и то же значение для всех сечений.

393. Циркуляция вектора. Формула Стокса. Вихрь. Пусть снова дано какое-нибудь векторное поле $\vec{A}(M)$. *Интеграл*

$$\int\limits_{(l)} A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz = \int\limits_{(l)} A_l\,dl,$$

взятый по некоторой кривой (l) в пределах рассматриваемой области, называется линейным интегралом от вектора $\vec{A}$ вдоль кривой (l). В случае замкнутой кривой этот интеграл называют *циркуляцией вектора $\vec{A}$ вдоль (l).*

Если поле $\vec{A}$ есть силовое поле, то линейный интеграл выражает работу сил поля при перемещении точки по кривой (l) [как и в плоском случае, ср. n° 335, 1)].

Представим себе некую поверхность (S), ограниченную замкнутым контуром (l). Тогда по известной уже читателю формуле Стокса [n° 373, (11)] циркуляция вектора $\vec{A}$ вдоль этого контура может быть выражена поверхностным интегралом:

$$\int\limits_{(l)} A_l\,dl = \iint\limits_{(S)} \left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\mu + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\nu\right\} dS.$$

Вектор с проекциями на оси

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad (11)$$

называется *вихрем* *или* *ротором* вектора $\vec{A}$ и обозначается символом

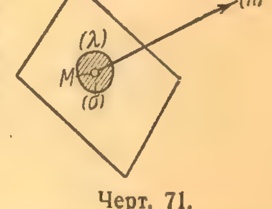
$$\operatorname{rot}\vec{A}\ ^{*)}.$$

Таким образом, в векторной форме формула Стокса запишется так:

$$\int\limits_{l} A_l\,dl = \iint\limits_{(S)} \operatorname{rot}_n \vec{A}\,dS. \tag{12}$$

Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура оказывается равной потоку вихря через поверхность, ограниченную этим контуром. При этом направление обхода контура и сторона поверхности должны соответствовать друг другу, как это разъяснено в n° 362.

Данное выше определение понятия «вихрь» страдает обычным недостатком: в нем используется определенная координатная система. Взяв *любое* направление n, исходящее из данной точки M, окружим ее в перпендикулярной к n плоскости площадкой (σ) с контуром (λ) (черт. 71). Тогда по формуле Стокса



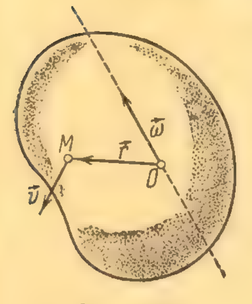
Черт. 71.

$$\int\limits_{(\lambda)} A_\lambda\,d\lambda = \iint\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}_n \vec{A}\,d\sigma;$$

разделив обе части равенства на площадь σ упомянутой площадки и «стягивая» последнюю к данной точке, в пределе получим

$$\operatorname{rot}_n \vec{A} = \lim_{(\sigma)\to M} \frac{\int\limits_{(\lambda)} A_\lambda\,d\lambda}{\sigma}\ ^{**)}.$$

Таким образом удается определить проекцию вектора $\operatorname{rot}\vec{A}$ на *любую* ось, а значит, — и сам вектор, без всякой ссылки на предварительно выбранную координатную систему.



Черт. 72.

Подчеркнем, что здесь *векторное поле* $\vec{A}$ *порождает векторное же поле вихря* $\operatorname{rot}\vec{A}$.

С помощью гамильтонова вектора ∇ можно просто записать и определение вихря:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

[см. выражения (2) для проекций векторного произведения!].

Пример. Рассмотрим произвольное движение некоего твердого тела вокруг неподвижной точки O (черт. 72). Как доказывается в кинематике, для

---

*) От английского слова rotation = вращение; употребительно и обозначение $\operatorname{curl}\vec{A}$ — от английского слова curl, означающего «завиток».

**) Легко усмотреть здесь своеобразное дифференцирование по области; обосновать его предоставляем читателю.

любого момента времени поле скорости $\vec{v}$ точек тела определяется формулой

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{\omega}$ — мгновенная «угловая скорость», а $\vec{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку O с произвольной точкой M тела. Проекции этого вектора на оси произвольной системы $Oxyz$ будут [см. (2)]

$$\omega_y z - \omega_z y, \quad \omega_z x - \omega_x z, \quad \omega_x y - \omega_y x.$$

Если, воспользовавшись выражениями (11), подсчитать проекции вихря для этого поля, то получим $2\omega_x$, $2\omega_y$, $2\omega_z$, так что

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}.$$

Таким образом, с точностью до числового множителя, ротор поля скорости $\vec{v}$ дает как раз мгновенную угловую скорость вращения; отсюда и самое название «ротор».

Вернемся теперь к вопросу о том, при каких условиях данное векторное поле $\vec{A}$ будет полем градиента для некоторой скалярной величины U:

$$\vec{A} = \operatorname{grad} U. \tag{13}$$

Это равенство равносильно следующим трем:

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. равносильно утверждению, что выражение

$$A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz$$

является (полным) дифференциалом от функции $U(x, y, z)$. При наличии равенства (13) поле $\vec{A}$ называется *потенциальным*, а первообразная функция U — *потенциальной функцией* поля.

Если ограничиться предположением, что рассматриваемая область (поверхностно) односвязна, то, перефразируя уже известные нам вещи [n° 374, см. условия (Б)], можно сказать, что *для того, чтобы поле $\vec{A}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всей области выполнялись равенства*

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

т. е. *чтобы* $\operatorname{rot} \vec{A}$ *обращался в нуль.* Понятие потенциального поля оказывается совпадающим с понятием «безвихревого» поля. В таком поле циркуляция по замкнутому контуру будет нулем; если же брать линейный интеграл по кривой, соединяющей любые две точки, то его величина оказывается не зависящей от формы кривой.

Все эти факты получают естественное истолкование в терминах «работы» для случая потенциального силового поля. Таким будет, как известно, например, поле ньютоновского притяжения как в случае отдельных притягивающих центров, так и при непрерывном распределении притягивающих масс.

§ 5. МНОГОКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

394. Объем m-мерного тела и m-кратный интеграл. Потребности анализа и его приложений не исчерпываются уже изученными типами определенных интегралов: простыми, двойными и тройными.

Наподобие того, как при определении простого, двойного, тройного интеграла, мы пользовались понятием *длины* отрезка, *площади* плоской фигуры, *объема* пространственного тела, в основе определения m-кратного интеграла лежит понятие *объема* *) m-мерной области. Для простейшей m-мерной области — m-мерного прямоугольного параллелепипеда

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m] \tag{1}$$

объемом называется произведение его измерений

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m).$$

Само собою ясно, что́ разуметь под объемом тела, составленного из конечного числа таких параллелепипедов. Элементарно можно показать, что объем не зависит от того, каким образом тело разложено на параллелепипеды.

Рассматривая такие «параллелепипедальные» тела, входящие в данное m-мерное тело (V) и выходящие из него, можно обычным образом построить понятие объема V для тела (V) [ср. n° **197**]. Мы будем иметь дело только с телами, для которых объем существует; он заведомо существует для тел, ограниченных *гладкими* или *кусочно-гладкими* поверхностями **), в частности, для простейших m-мерных областей: m-мерной пирамиды

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \ldots, \quad x_m \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant h$$

и m-мерной сферы

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leqslant r^2;$$

ниже мы вычислим их объемы.

Пусть в области (V) задана функция m переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; тогда, разлагая эту область на элементарные части и повторяя другие столь привычные уже нам операции [ср. n° **376**], придем к понятию m-кратного интеграла

$$I = \overbrace{\int \ldots \int}^{m}_{(V)} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m. \tag{2}$$

В случае непрерывной подинтегральной функции он наверно существует.

Вычисление такого интеграла приводится к вычислению интегралов низшей кратности, вплоть до простых. В случае, когда область интегрирования (V) представляет собою прямоугольный параллелепипед (1), имеет место формула, аналогичная формуле (6) n° **378**:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_m. \tag{3}$$

---

*) Мы решили сохранить этот термин, хотя смысл его, разумеется, меняется вместе с m: речь идет об «m-мерном» объеме.

**) *Гладкой* поверхностью называется здесь образ в m-мерном пространстве, определяемый m параметрическими уравнениями с $m-1$ параметрами, причем фигурирующие в уравнениях функции параметров должны быть непрерывны вместе с частными производными, и определители $(m-1)$-го порядка матрицы производных не должны одновременно обращаться в нуль.

Для областей более общего вида, характеризуемых неравенствами

$$x_1^0 \leqslant x_1 \leqslant X_1, \quad x_2^0(x_1) \leqslant x_2 \leqslant X_2(x_1), \ldots,$$
$$x_m^0(x_1, \ldots, x_{m-1}) \leqslant x_m \leqslant X_m(x_1, \ldots, x_{m-1}),$$

применима формула, аналогичная формуле (6а) n° **378**:

$$I = \int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0(x_1)}^{X_2(x_1)} dx_2 \ldots \int_{x_m^0(x_1, \ldots, x_{m-1})}^{X_m(x_1, \ldots, x_{m-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_m. \qquad (4)$$

Подобным же образом (для соответствующего вида областей, который в каждом случае нетрудно установить) имеют место и другие формулы, аналогичные формулам (5а) и (7а) n° **378**, где вычисление m-кратного интеграла приводится к последовательному вычислению интегралов низших кратностей, в сумме дающих m.

Все это доказывается совершенно так же, как для случаев $m=2$ или $m=3$, без привлечения каких бы то ни было новых идей, так что нет надобности на этом задерживаться.

Замечание. Остроградский в мемуаре 1834 г. впервые со всею тщательностью выясняет пределы интегрирований по отдельным переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$, к которым сводится вычисление многократного интеграла, распространенного на все значения этих переменных, удовлетворяющие неравенству вида $L(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqslant 0$. Здесь же мы находим и формулу, обобщающую известную уже нам формулу Остроградского [n° **380**, (4)] на случай любого числа переменных и связывающую интеграл, взятый по $(m-1)$-мерной замкнутой поверхности с неким m-кратным интегралом, распространенным на ограниченное ею тело.

395. Примеры. 1) Найти объем T_m m-мерной пирамиды

$$(T_m): x_1 \geqslant 0, \ldots, \quad x_m \geqslant 0, \quad x_1 + \ldots + x_m \leqslant h.$$

Решение. Имеем

$$T_m = \overbrace{\int \ldots \int}^{m}_{(T_m)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_m = \int_0^h dx_1 \int_0^{h-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{h-x_1-\ldots-x_{m-1}} dx_m.$$

Заменяя в этих простых интегралах последовательно переменные по формулам

$$x_1 = h\xi_1, \quad x_2 = h\xi_2, \ldots, \quad x_m = h\xi_m,$$

придем к результату

$$T_m = h^m \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \ldots \int_0^{1-\xi_1-\ldots-\xi_{n-1}} d\xi_n =$$

$$= h^n \overbrace{\int \ldots \int}^{m}_{\substack{\xi_1 \geqslant 0, \ldots, \xi_n \geqslant 0 \\ \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant 1}} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \alpha_n h^n,$$

если через α_n обозначить значение интеграла, подобного предложенному, но отвечающего $h=1$.

С другой же стороны, имеем (попутно используя полученный результат)

$$\alpha_n = \int_0^1 d\xi_n \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{\substack{\xi_1 \geq 0, \ldots, \xi_{n-1} \geq 0 \\ \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} \leq 1 - \xi_n}} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} = \alpha_{n-1} \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1} d\xi_n = \frac{\alpha_{n-1}}{n}.$$

Найденное рекуррентное соотношение (с учетом того, что $\alpha_1 = 1$) дает нам

$$\alpha_n = \frac{1}{n!},$$

так что окончательно

$$T_n = \frac{h^n}{n!}.$$

2) Найти объем V_m m-мерной сферы [n° 126]

$$(V_m):\quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 \leq R^2.$$

Решение. На этот раз речь идет о вычислении интеграла

$$V_m = \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{x_1^2 + \ldots + x_m^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_m.$$

Полагая

$$x_1 = R\xi_1, \quad x_2 = R\xi_2, \ \ldots, \ x_m = R\xi_m,$$

как и только что, легко получить, что $V_m = \beta_m R^m$, где числовой коэффициент β_m выражает объем m-мерной сферы радиуса 1.

Для определения β_m преобразуем

$$\beta_m = \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 \leq 1} d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_m =$$

$$= \int_{-1}^{1} d\xi_m \overbrace{\int \cdots \int}^{m-1}_{\xi_1^2 + \ldots + \xi_{m-1}^2 \leq 1 - \xi_m^2} d\xi_1 \ldots d\xi_{m-1}.$$

Внутренний интеграл представляет объем $(m-1)$-мерной сферы радиуса $\sqrt{1-\xi_m^2}$ и, следовательно, равен $\beta_{m-1}(1-\xi_m^2)^{\frac{m-1}{2}}$. Подставляя, придем снова к рекуррентному соотношению

$$\beta_m = 2\beta_{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \, d\theta$$

или [см. n° 312, 2)]

$$\beta_m = \beta_{m-1} \cdot \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}.$$

Так как $\beta_1 = 2$, то легкое вычисление дает

$$\beta_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}.$$

Искомый же объем равен

$$V_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} R^m.$$

Для случаев m четного и нечетного получаются формулы

$$V_{2n} = \frac{\pi^n}{n!} R^{2n}, \quad V_{2n+1} = \frac{2(2\pi)^n}{(2n+1)!!} R^{2n+1}.$$

В частности, для V_1, V_2, V_3, естественно, находим хорошо известные значения $2R$, πR^2, $\frac{4}{3}\pi R^3$.

ГЛАВА ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

396. Периодические величины и гармонический анализ. В науке и технике часто приходится иметь дело с периодическими явлениями, т. е. такими, которые воспроизводятся в прежнем виде через определенный промежуток времени T, называемый периодом. Примером может служить установившееся движение паровой машины, которая по истечении полного оборота снова проходит через свое начальное положение, затем явление переменного тока, и т. п. Различные величины, связанные с рассматриваемым периодическим явлением, по истечении периода T возвращаются к своим прежним значениям и представляют, следовательно, периодические функции от времени t, характеризуемые равенством

$$\varphi(t+T)=\varphi(t).$$

Таковы, например, сила и напряжение переменного тока или — в примере паровой машины — путь, скорость и ускорение крейцкопфа, давление пара, касательное усилие в пальце кривошипа и т. д.

Простейшей из периодических функций (если не считать постоянной) является *синусоидальная величина:* $A\sin(\omega t+\alpha)$, где ω есть частота, связанная с периодом T соотношением:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \qquad (1)$$

Из подобных простейших периодических функций могут быть составлены и более сложные. Наперед ясно, что составляющие синусоидальные величины должны быть разных частот, ибо, как легко убедиться, сложение синусоидальных величин одной и той же частоты не дает ничего нового, так как приводит опять к синусоидальной величине, притом той же частоты. Наоборот, если сложить несколько величин вида

$$\left.\begin{array}{c} y_0=A_0, \quad y_1=A_1\sin(\omega t+\alpha_1), \quad y_2=A_2\sin(2\omega t+\alpha_2), \\ y_3=A_3\sin(3\omega t+\alpha_3), \ldots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

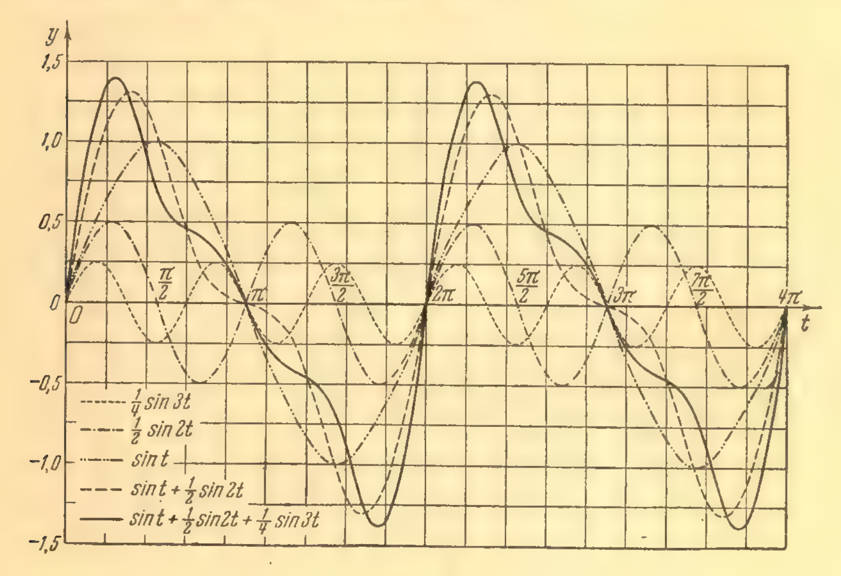
которые, если не считать постоянной, имеют частоты

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\ \ldots,$$

кратные наименьшей из них, ω, и периоды

$$T,\quad \frac{1}{2}T,\quad \frac{1}{3}T,\ \ldots,$$

то получится периодическая функция (с периодом T), но уже существенно отличная от величин типа (2).



Черт. 73.

Для примера мы воспроизводим здесь (черт. 73) сложение трех синусоидальных величин:

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 3t;$$

график этой функции по своему характеру уже значительно разнится от синусоиды. Еще в большей степени это имеет место для суммы бесконечного ряда, составленного из величин вида (2).

Теперь естественно поставить обратный вопрос: можно ли данную периодическую функцию $\varphi(t)$ периода T представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного множества синусоидальных величин вида (2)? Как увидим ниже, по отношению к довольно широкому классу функций на этот вопрос можно дать утвердительный ответ, но только если привлечь именно всю

бесконечную последовательность величин (2). Для функций этого класса имеет место разложение в «тригонометрический ряд»:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) +$$
$$+ A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n), \qquad (3)$$

причем A_0, A_1, α_1, A_2, α_2, ... суть постоянные, имеющие особые значения для каждой такой функции, а частота ω дается формулой (1).

Геометрически это означает, что *график периодической функции получается путем наложения ряда синусоид*. Если же истолковать каждую синусоидальную величину механически как представляющую гармоническое колебательное движение, то можно также сказать, что здесь *сложное колебание, характеризуемое функцией* $\varphi(t)$, *разлагается на отдельные гармонические колебания*. В связи с этим отдельные синусоидальные величины, входящие в состав разложения (3), называют *гармоническими составляющими* функции $\varphi(t)$ или просто ее *гармониками* (первой, второй и т. д.). Самый же процесс разложения периодической функции на гармоники носит название *гармонического анализа*.

Если за независимую переменную выбрать

$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T},$$

то получится функция от x:

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

тоже периодическая, но со стандартным периодом 2π. Разложение (3) примет вид

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) +$$
$$+ A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \ldots = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha_n). \qquad (4)$$

Развернув члены этого ряда по формуле для синуса суммы и положив

$$A_0 = a_0, \quad A_n \sin\alpha_n = a_n, \quad A_n \cos\alpha_n = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

мы придем к окончательной форме тригонометрического разложения:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) +$$
$$+ (a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x) + \ldots =$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (5)$$

в которой мы всегда и будем его рассматривать *). Здесь функция от угла x, имеющая период 2π, оказывается разложенной по косинусам и синусам углов, кратных x.

Мы пришли к разложению функции в тригонометрический ряд, отправляясь от периодических, колебательных явлений и связанных с ними величин. *Важно отметить, однако, уже сейчас, что подобные разложения часто оказываются полезными и при исследовании функций, заданных лишь в определенном конечном промежутке и вовсе не порожденных никакими колебательными явлениями.*

397. Определение коэффициентов по методу Эйлера — Фурье. Для того чтобы установить возможность тригонометрического разложения (5) для заданной функции $f(x)$, имеющей период 2π, нужно исходить из определенного набора коэффициентов a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... Мы укажем прием для определения их, который во второй половине XVIII века был применен Эйлером и независимо от него в начале XIX века — Фурье.

Будем впредь предполагать функцию $f(x)$ непрерывной или кусочно-непрерывной в промежутке $[-\pi, \pi]$ **).

Допустим, что разложение (5) имеет место, и проинтегрируем его почленно от $-\pi$ до π; мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right].$$

Но, как легко видеть,

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \\ \text{и}\qquad & \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

*) От этого разложения, разумеется, легко перейти в случае надобности обратно к разложению вида (4).

**) Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной в промежутке $[a, b]$, если она в нем непрерывна, за исключением конечного числа точек, где налицо скачки. Таким образом, промежуток $[a, b]$ разлагается на конечное число частичных промежутков, в каждом из которых в отдельности функция $f(x)$ сплошь непрерывна, даже включая их концы, если там заменить значения функции — ее предельными значениями. Можно представить себе кусочно-непрерывную функцию как бы «склеенной» из нескольких непрерывных функций, с тем лишь, что в «точках стыка» (равно как и на концах промежутка) ее значения устанавливаются особо.

Поэтому все члены под знаком суммы будут нулями, и окончательно найдем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx. \qquad (7)$$

Для того чтобы установить величину коэффициента a_m, умножим обе части равенства (5), которое мы все время предполагаем выполненным, на $\cos mx$ и снова проинтегрируем почленно в том же промежутке:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx \right].$$

Первый член справа исчезает ввиду (6). Далее имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin (n+m) x + \sin (n-m) x]\, dx = 0, \qquad (8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n+m) x + \cos (n-m) x]\, dx = 0, \qquad (9)$$

если $n \neq m$, и, наконец,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2}\, dx = \pi. \qquad (10)$$

Таким образом, обращаются в нуль все интегралы под знаком суммы, кроме интеграла, при котором множителем стоит именно коэффициент a_m. Отсюда этот коэффициент и определяется:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (11)$$

Аналогично, умножая предварительно разложение (5) на $\sin mx$ и затем интегрируя почленно, определим коэффициент при синусе:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (12)$$

При этом, кроме (6) и (8), мы опираемся еще на легко проверяемые соотношения:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \tag{13}$$

если $n \neq m$, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi. \tag{14}$$

Формулы (7), (11) и (12) известны под именем *формул Эйлера — Фурье;* вычисленные по этим формулам коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* данной функции, а составленный с их помощью тригонометрический ряд (5) — ее *рядом Фурье.* Рядами Фурье мы исключительно и будем заниматься в настоящей главе.

Дадим теперь себе отчет в том, какова логическая ценность проведенных рассуждений. Так как мы исходили из предположения, что тригонометрическое разложение (5) имеет место, то вопрос о том, отвечает ли это действительности, естественно, остается открытым. Но убедительны ли те соображения, с помощью которых по примеру Эйлера и Фурье мы определили коэффициенты разложения (5), даже в предположении, что оно осуществляется? Мы пользовались повторно почленным интегрированием ряда, а эта операция не всегда дозволительна [n° **269**]. Достаточным условием для ее применимости является равномерная сходимость ряда. Поэтому строго установленным можно считать лишь следующее:

если функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (5)*), *то последний необходимо будет ее рядом Фурье.*

Если же не предполагать наперед равномерности сходимости, то наши соображения не доказывают даже и того, что функция может разлагаться только в ряд Фурье. Каков же смысл приведенных соображений? Их можно рассматривать лишь как наведение, достаточное для того, чтобы в поисках тригонометрического разложения данной функции начать с ее ряда Фурье, обязуясь (уже со всею строгостью!) установить условия, при которых он сходится и притом — именно к данной функции.

Пока же это не сделано, мы имеем право лишь формально рассматривать ряд Фурье данной функции $f(x)$, но не можем о нем ничего утверждать, кроме того, что он «порожден» функцией $f(x)$.

---

*) Заметим, что равномерная сходимость сохранится и при умножении всех членов ряда на ограниченные функции $\cos mx$, $\sin mx$.

Эту его **связь** с функцией f обычно обозначают так:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{5a}$$

избегая знака равенства.

398. Ортогональные системы функций. Изложенное в предыдущем номере является образцом рассуждений, которыми часто приходится пользоваться в математическом анализе при изучении многих разложений.

Назовем две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные в промежутке $[a, b]$, ортогональными в этом промежутке, если их произведение имеет интеграл, равный **нулю**:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных в промежутке $[a, b]$ и непрерывных в нем или, по крайней мере, кусочно-непрерывных. Если функции данной системы попарно ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \tag{15}$$

$$(n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ n \neq m)$$

то ее называют *ортогональной системой* функций. При этом мы всегда будем предполагать, что

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \lambda_n > 0. \tag{16}$$

При соблюдении условий $\lambda_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ система называется *нормальной*. Если же эти условия не выполнены, то при желании можно перейти к системе $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, которая уже заведомо будет нормальной.

Важнейшим примером ортогональной системы функций как раз и является тригонометрическая система

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \tag{17}$$

в промежутке $[-\pi, \pi]$, которую мы рассматривали выше; ее ортогональность следует из соотношений (6), (8), (9) и (13). Однако нормальной она не будет ввиду (10) и (14). Умножая тригонометрические функции (17) на надлежащие множители, легко получить

нормальную систему:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{17*}$$

Пусть в промежутке $[a, b]$ дана какая-нибудь ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$. Зададимся целью разложить определенную в $[a, b]$ функцию $f(x)$ в «ряд по функциям φ» вида

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{18}$$

Для определения коэффициентов этого разложения, допуская его возможность, поступим так, как мы это сделали в частном случае выше. Именно, умножив обе части разложения на $\varphi_m(x)$, проинтегрируем его почленно:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx.$$

В силу ортогональности [см. (15) и (16)], все интегралы справа, кроме одного, будут нулями, и легко получается:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

[формулы (7), (11), (12) являются частными случаями этой формулы].

Ряд (18) с коэффициентами, составленными по формулам (19), называется *(обобщенным) рядом Фурье* данной функции, а сами коэффициенты — ее *(обобщенными) коэффициентами Фурье* относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$. Особенно просто выглядят формулы (19) в случае нормальной системы; тогда

$$c_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx. \tag{19a}$$

Конечно, здесь могут быть повторены те же замечания, какими мы закончили предыдущий номер. Обобщенный ряд Фурье, построенный для данной функции $f(x)$, связан с нею лишь формально. И в общем случае связь между функцией $f(x)$ и ее (обобщенным) рядом Фурье обозначают так:

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} c_n\varphi_n(x). \tag{18a}$$

Сходимость этого ряда к функции $f(x)$, как и в случае тригонометрического ряда, подлежит еще исследованию.

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ФУРЬЕ

399. Постановка вопроса. Интеграл Дирихле. Пусть $f(x)$ будет непрерывная или кусочно-непрерывная функция с периодом 2π. Вычислим постоянные (ее коэффициенты Фурье):

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos mu\,du, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin mu\,du \tag{1}$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad\qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и по ним составим ряд Фурье нашей функции

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx). \tag{2}$$

Читатель замечает здесь маленькое отступление от обозначений n° 397: коэффициент a_0 мы определяем теперь по общей формуле для a_m при $m = 0$, в разрез с формулой (7) упомянутого номера, но зато свободный член ряда пишем в виде $\frac{a_0}{2}$.

Замечание. Если функция $F(u)$ кусочно-непрерывна в любом конечном промежутке и к тому же имеет период 2π, так что

$$F(u + 2\pi) = F(u),$$

то *величина интеграла*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)\,du$$

по промежутку длины 2π *не зависит от* α.

Действительно, ограничиваясь случаем непрерывной функции F, имеем

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)\,du = \int_{\alpha}^{0} F(u)\,du + \int_{0}^{2\pi} F(u)\,du + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(u)\,du.$$

Если в последнем интеграле сделать подстановку $u = 2\pi + t$, то он приведется к интегралу

$$\int_{0}^{\alpha} F(t + 2\pi)\,dt = \int_{0}^{\alpha} F(t)\,dt$$

и лишь знаком будет отличаться от первого интеграла. Таким образом, рассматриваемый интеграл оказывается равным интегралу

$$\int_{0}^{2\pi} F(u)\,du,$$

уже не содержащему α. Легко распространить этот результат и на случай любой кусочно-непрерывной функции.

Этим замечанием мы в последующем будем пользоваться. В частности, и в формулах (1), определяющих коэффициенты Фурье, интегралы могут быть взяты по любому промежутку длины 2π; например, можно было бы писать

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx \tag{1a}$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad\qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и т. п.

Для того чтобы исследовать поведение ряда (2) в какой-нибудь определенной точке $x = x_0$, составим удобное выражение для его частичной суммы

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0).$$

Подставим вместо a_m и b_m их интегральные выражения (1) и подведем постоянные числа $\cos mx_0$, $\sin mx_0$ под знак интеграла:

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,[\cos mu \cos mx_0 + \sin mu \sin mx_0]\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m(u - x_0)\right\} du.$$

Легко проверить тождество

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{m=1}^{n}\left[\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)\alpha\right]\right\} =$$

$$= \frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Воспользовавшись им для преобразования подинтегрального выражения, окончательно получим

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u-x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u-x_0}{2}}\,du. \tag{3}$$

Этот интеграл обыкновенно называют *интегралом Дирихле* (хотя у Фурье он встречается гораздо раньше!)

Так как мы имеем здесь дело с функциями от u периода 2π, то промежуток интегрирования $[-\pi, \pi]$ по сделанному выше замечанию можно заменить, например, промежутком $[x_0-\pi, x_0+\pi]$:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u-x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u-x_0}{2}}\,du.$$

Подстановкой $t=u-x_0$ преобразуем этот интеграл к виду

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\,dt.$$

Затем, разбивая интеграл на два: $\int_0^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}$, и приводя второй интеграл путем изменения знака переменной тоже к промежутку $[0, \pi]$, придем к такому окончательному выражению для частичной суммы ряда Фурье:

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\,dt. \tag{4}$$

Таким образом, дело сводится к исследованию поведения именно этого интеграла, содержащего параметр n. *Своеобразие представляющейся здесь задачи заключается в том, что в этом случае не может быть использован предельный переход под знаком интеграла* *), который до сих пор [см. главу XVIII] служил нам

*) В данном случае подинтегральное выражение при $n\to\infty$ вовсе не имеет предела.

единственным средством для разыскания предела интеграла, содержащего параметр. И с таким положением вещей нам в этой главе придется сталкиваться систематически.

400. Основная лемма. Прежде чем продолжить наше исследование, докажем следующее важное для дальнейшего утверждение, которое принадлежит Риману:

Если функция $g(t)$ непрерывна или кусочно-непрерывна в некотором конечном промежутке $[a, b]$, то

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b g(t) \sin pt\, dt = 0$$

и, аналогично,

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b g(t) \cos pt\, dt = 0.$$

Доказательство достаточно провести для первого из этих пределов, предполагая функцию $g(t)$ непрерывной.

Заметим предварительно, что, каков бы ни был конечный промежуток $[\alpha, \beta]$, имеем такую оценку:

$$\left| \int_\alpha^\beta \sin pt\, dt \right| = \left| \frac{\cos p\alpha - \cos p\beta}{p} \right| \leqslant \frac{2}{p}. \tag{5}$$

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей точками

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b \tag{6}$$

и в соответствии с этим разложим и интеграл

$$\int_a^b g(t) \sin pt\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin pt\, dt.$$

Обозначив через m_i наименьшее из значений $g(t)$ в i-м промежутке, можно преобразовать это выражение так:

$$\int_a^b g(t) \sin pt\, dt =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin pt\, dt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin pt\, dt.$$

Если ω_i есть колебание функции $g(t)$ в i-м промежутке, то в его пределах $g(t) - m_i \leqslant \omega_i$; с учетом неравенства (5) теперь легко получить для нашего интеграла оценку:

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i + \frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

Задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, выберем сначала дробление (6) так, чтобы было $\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, так что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2};$$

это сделать можно ввиду непрерывности функции g. Теперь, *так как числа* m_i *тем самым уже определены*, можем взять

$$p > \frac{4}{\varepsilon}\sum |m_i|$$

и для этих значений p получим

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| < \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Мы обращаем внимание читателя на то, что уже здесь пределы, к которым стремятся интегралы, установлены *помимо предельного перехода под знаком интеграла*.

Если вспомнить формулы (1), выражающие коэффициенты Фурье, то в качестве первого непосредственного следствия отсюда получается утверждение:

Коэффициенты Фурье a_m, b_m кусочно-непрерывной функции при $m \to \infty$ стремятся к нулю.

401. Принцип локализации. Вторым непосредственным же следствием доказанной леммы является так называемый «принцип локализации».

Взяв произвольное положительное число $\delta < \pi$, разобьем интеграл в (4) на два: $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$. Если второй из них переписать в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

то станет ясно, что множитель при синусе

$$\frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

является кусочно-непрерывной функцией от t в промежутке $[\delta, \pi]$, ибо такова функция от t, стоящая в числителе, в то время как знаменатель $2\sin\frac{1}{2}t$, не обращающийся в нуль в этом промежутке, сохраняет непрерывность. В таком случае по лемме этот интеграл при $n\to\infty$ стремится к нулю, так что и самое существование предела для частичной суммы ряда Фурье, $s_n(x_0)$, и величина этого предела целиком определяются поведением одного лишь интеграла

$$\rho_n(\delta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}dt. \qquad (7)$$

Но в этот интеграл входят лишь значения функции $f(x)$, отвечающие изменению аргумента в промежутке от $x_0-\delta$ до $x_0+\delta$. Этим простым соображением и доказывается «принцип локализации», состоящий в следующем:

Теорема. *Поведение ряда Фурье функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 *) зависит исключительно от значений, принимаемых этой функцией в непосредственной близости рассматриваемой точки,* т. е. в сколь угодно малой ее окрестности.

Таким образом, если, например, взять две функции, значения которых в произвольно малой окрестности x_0 совпадают, то как бы они ни разнились вне этой окрестности, соответствующие этим функциям ряды Фурье ведут себя в точке x_0 одинаково: либо оба сходятся, и притом к одной и той же сумме, либо оба расходятся. Этот результат покажется еще более разительным, если подчеркнуть, что самые коэффициенты Фурье рассматриваемых функций, зависящие от всех их значений, могут оказаться совершенно различными!

Эта теорема обычно связывается с именем Римана, ибо является следствием более общей его теоремы, доказанной в 1853 г. Следует, однако, отметить, что идея «принципа локализации» содержится уже в одной работе Остроградского 1828 г. по математической физике, а также отражена в исследованиях Лобачевского 1834 г. по тригонометрическим рядам.

402. Представление функции рядом Фурье. Возвратимся к прерванному исследованию поведения частичной суммы $s_n(x_0)$ ряда Фурье, для которой мы получили интегральное представление (4).

---

*) Мы понимаем под этим сходимость или расходимость ряда в точке x_0, а также наличие для него — в случае сходимости — той или иной суммы.

Наложим теперь на функцию $f(x)$ более тяжелое требование, а именно — *предположим ее кусочно-дифференцируемой в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *).

Тогда имеет место общая

Теорема. *Если функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-дифференцируема в промежутке $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье в каждой точке $x = x_0$ сходится и имеет сумму*

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Эта сумма, очевидно, равна $f(x_0)$, если в точке $x = x_0$ функция непрерывна.

Доказательство. Отметим, что равенство (4) имеет место для каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей поставленным условиям. Если, в частности, взять $f(x) \equiv 1$, то $s_n(x) \equiv 1$, и из (4) получим, что

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt. \tag{8}$$

Умножая обе части этого равенства на постоянное число S_0 и вычитая результат из (4), найдем

$$s_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x_0+t)+f(x_0-t)-$$
$$-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt;$$

для нашей цели нужно доказать, что интеграл справа при $n \to \infty$ стремится к нулю.

Представим его в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt, \tag{9}$$

*) Функция $f(x)$ называется кусочно-дифференцируемой в промежутке $[a, b]$, если этот промежуток разлагается на конечное число частичных промежутков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах не только имеет предельные значения, но и односторонние производные, при условии замены на этих концах значений функции упомянутыми предельными значениями. Можно представить себе кусочно-дифференцируемую функцию как бы «склеенной» из нескольких функций, дифференцируемых (а следовательно, и непрерывных) в замкнутых частичных промежутках с тем лишь, что в «точках стыка» (равно как и на концах a и b основного промежутка) ее значения устанавливаются особо.

где положено

$$g(t)=\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}-\frac{f(x_0-t)-f(x_0+0)}{-t}\right]\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t};\quad(10)$$

если бы нам удалось установить, что эта функция кусочно-непрерывна, то из леммы n°**400** следовало бы уже, что интеграл (9) имеет пределом нуль при $n\to\infty$. Но в промежутке $(0, \pi]$ функция $g(t)$ вообще непрерывна, за исключением разве лишь конечного числа точек, где она может иметь скачки — ибо такова функция f. Остается открытым лишь вопрос о поведении функции $g(t)$ при $t\to+0$.

Мы докажем существование конечного предела

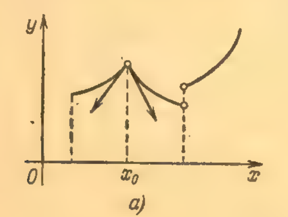
$$\lim_{t\to+0} g(t)=K;$$

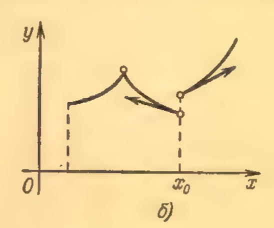
положив тогда $g(0)=K$ (до сих пор это значение оставалось формально неопределенным!), мы в точке $t=0$ получим непрерывность, и применение леммы окажется оправданным. Но второй множитель в правой части равенства (10) явно имеет пределом единицу; обратимся к выражению в квадратных скобках.

Пусть, для простоты, сначала точка x_0 лежит в н у т р и промежутка, где функция $f(x)$ дифференцируема. Тогда $f(x_0+0)=$ $=f(x_0-0)=f(x_0)$, и каждое из отношений

$$\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},\qquad \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t}\quad(11)$$

стремится к пределу $f'(x_0)$, а $[\ldots]$ — к нулю. Если же x_0 есть «точка стыка», то при этом она может оказаться как точкой не-





Черт. 74.

прерывности, так и точкой разрыва. В первом случае мы опять столкнемся с отношениями (11), но они будут стремиться на этот раз к различным пределам, соответственно — к производной справа и к производной слева (черт. 74 *а*). К аналогичному результату придем и в случае разрыва, но здесь значение $f(x_0)$ заменится значениями $f(x_0\pm0)$ тех функций, от «склеивания» которых получилась данная, а пределами отношений будут односторонние производные упомянутых функций при $x=x_0$ (черт. 74 *б*).

Итак, наше заключение справедливо во всех случаях.

403. Случай непериодической функции. Вся построенная выше теория исходила из предположения, что заданная функция определена для всех вещественных значений x и притом имеет период 2π. Между тем чаще всего приходится иметь дело с непериодической функцией $f(x)$, иной раз даже заданной только в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Чтобы иметь право применить к такой функции изложенную теорию, введем взамен нее вспомогательную функцию $f^*(x)$, определенную следующим образом. В промежутке $(-\pi, \pi]$ мы отождествляем f^* с f:

$$f^*(x) = f(x) \qquad (-\pi < x \leqslant \pi), \tag{12}$$

затем полагаем

$$f^*(-\pi) = f^*(\pi) = f(\pi),$$

а на остальные вещественные значения x распространяем функцию $f^*(x)$ по закону периодичности.

К построенной таким образом функции $f^*(x)$ с периодом 2π можно уже применять доказанную теорему разложения. Однако, если речь идет о точке x_0, лежащей строго между $-\pi$ и π, то, ввиду (12), нам пришлось бы иметь дело лишь с заданной функцией $f(x)$. По той же причине и коэффициенты разложения можно вычислять по формулам (1), не переходя к функции $f^*(x)$. Короче говоря, *все доказанное выше непосредственно переносится на заданную функцию* $f(x)$, минуя вспомогательную функцию $f^*(x)$.

Особого внимания, однако, требуют концы промежутка $x = \pm\pi$. При применении к функции $f^*(x)$ теоремы n° **402**, скажем, в точке $x = \pi$, нам пришлось бы иметь дело как со значениями вспомогательной функции $f^*(x)$ слева от $x = \pi$, где они совпадают с соответственными значениями данной функции $f(x)$, так и со значениями $f^*(x)$ справа от $x = \pi$, *где они совпадают уже со значениями $f(x)$ справа от* $x = -\pi$. Поэтому для $x = \pm\pi$ в качестве значения S_0 надлежало бы взять

$$S_0 = \frac{f^*(\pi+0) + f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f^*(-\pi+0) + f^*(-\pi-0)}{2} = \\ = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

Таким образом, если заданная функция $f(x)$ даже непрерывна при $x = \pm\pi$, но не имеет периода 2π, так что $f(\pi) \neq f(-\pi)$, то — при соблюдении требования кусочной дифференцируемости — суммой ряда Фурье будет число

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2},$$

отличное как от $f(-\pi)$, так и от $f(\pi)$. Для такой функции разложение может иметь место лишь в открытом промежутке $(-\pi, \pi)$.

Следующее замечание заслуживает серьезного внимания читателя. Если тригонометрический ряд (2) сходится в промежутке $(-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$, то ввиду того, что его члены имеют период 2π, он сходится всюду, и сумма его $S(x)$ оказывается тоже периодической функцией от x с периодом 2π. *Но эта сумма вне указанного промежутка вообще уже не совпадает с функцией $f(x)$* (если последняя была задана на всей вещественной оси). Ниже это замечание будет проиллюстрировано примерами.

Отметим, наконец, что вместо промежутка $[-\pi, \pi]$ можно было бы взять любой промежуток $[\alpha, \alpha+2\pi]$ длины 2π.

404. Случай произвольного промежутка. Предположим, что функция $f(x)$ задана в промежутке $[-l, l]$ произвольной длины $2l$ и кусочно-дифференцируема в нем. Если прибегнуть к подстановке

$$x=\frac{ly}{\pi} \qquad (-\pi\leqslant y\leqslant\pi),$$

то получится функция $f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$ от y в промежутке $[-\pi, \pi]$, тоже кусочно-дифференцируемая, к которой уже приложимы рассмотрения предыдущего номера. Как мы видели, за исключением точек разрыва и концов $-\pi$, π промежутка, можно разложить ее в ряд Фурье:

$$f\left(\frac{ly}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny),$$

коэффициенты которого определяются формулами Эйлера — Фурье:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Вернемся теперь к прежней переменной x, полагая

$$y=\frac{\pi x}{l}.$$

Тогда мы получим разложение заданной функции $f(x)$ в тригонометрический ряд несколько измененного типа:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{13}$$

Здесь косинусы и синусы берутся от углов, кратных не x, а $\frac{\pi x}{l}$. Можно было бы и формулы для определения коэффициентов этого разложения преобразовать той же подстановкой к виду

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \quad (14)$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad\qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

В отношении концов промежутка $x = \pm l$ сохраняют силу замечания, сделанные в предыдущем номере относительно точек $x = \pm\pi$. Конечно, промежуток $(-l,\ l]$ может быть заменен любым другим промежутком длины $2l$, в частности, промежутком $(0,\ 2l]$. В последнем случае формулы (14) должны быть заменены формулами

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$
$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad\qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \quad (14а)$$

405. Разложение только по косинусам или только по синусам. Начнем со следующего замечания: если заданная в промежутке $[-\pi,\ \pi]$ (непрерывная или, по крайней мере, кусочно-непрерывная) функция $f(x)$ будет нечетной, то для нее

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

В этом легко убедиться, представив интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}$ в виде суммы интегралов: $\int_{0}^{\pi} + \int_{-\pi}^{0}$ и заменив во втором из них x на $-x$. Таким же путем устанавливается, что в случае четной функции $f(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Пусть теперь $f(x)$ будет кусочно-дифференцируемая в промежутке $[-\pi,\ \pi]$ четная функция. Тогда произведение $f(x)\sin nx$ окажется нечетной функцией, и по сказанному

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Таким образом, *ряд Фурье четной функции содержит одни лишь косинусы:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{15}$$

Так как $f(x)\cos nx$ в этом случае тоже будет четной функцией, то, применив сюда второе из сделанных выше замечаний, можем коэффициенты a_n разложения написать в виде

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{16}$$

Если же функция $f(x)$ будет нечетной, то нечетной будет и функция $f(x)\cos nx$, так что

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Мы приходим к заключению, что *ряд Фурье нечетной функции содержит одни лишь синусы:*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{17}$$

При этом ввиду четности произведения $f(x)\sin nx$ можно писать:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{18}$$

Отметим попутно, что каждая функция $f(x)$, заданная в промежутке $[-\pi, \pi]$, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной составляющих функций:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

где

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Очевидно, что ряд Фурье функции $f(x)$ как раз и составится из разложения по косинусам функции $f_1(x)$ и разложения по синусам функции $f_2(x)$.

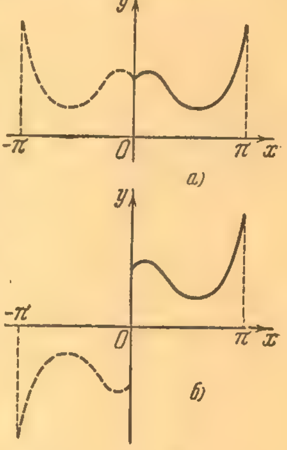
Предположим, далее, что функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0, \pi]$. Желая разложить ее в этом промежутке в ряд Фурье (2), мы дополним определение нашей функции для значений x в промежутке $[-\pi, 0)$ по произволу, но с сохранением кусочной дифференцируемости, а затем применим сказанное в n° **403**.

Подчеркнутый выше произвол в определении функции дает возможность получить таким путем различные тригонометрические ряды.

Можно использовать произвол в определении функции в промежутке $[-\pi, 0]$ так, чтобы получить для $f(x)$ разложение только по косинусам или только по синусам. Действительно, представим себе, что для $0 < x \leqslant \pi$ мы полагаем

$$f(-x) = f(x), \tag{19}$$

так что в результате получится четная функция в промежутке $[-\pi, \pi]$ (черт. 75 *а*), к тому же имеющая даже период 2π. Ее разложение, как мы видели, будет содержать одни только косинусы. Коэффициенты разложения можно вычислять по формулам (16), куда входят лишь значения первоначально заданной функции $f(x)$.



Черт. 75.

Аналогично, если дополнить определение функции условием (для $0 < x \leqslant \pi$)

$$f(-x) = -f(x) \tag{20}$$

так, чтобы она оказалась нечетной (черт. 75 *б*), то в ее разложении будут участвовать только члены с синусами. Коэффициенты его определяются по формулам (18).

Таким образом, *заданную в промежутке* $[0, \pi]$ *функцию при соблюдении известных условий оказывается возможным разлагать как в ряд по косинусам, так и в ряд по синусам.*

Особого исследования требуют, впрочем, точки $x = 0$ и $x = \pi$. Здесь оба разложения ведут себя по-разному. Предположим для простоты, что заданная функция $f(x)$ непрерывна при $x = 0$ и $x = \pi$, и рассмотрим сначала разложение по косинусам. Условие (19) прежде всего сохраняет непрерывность при $x = 0$, так что ряд (15) при $x = 0$ будет сходится именно к $f(0)$. Так как, далее,

$$f(-\pi + 0) = f(\pi - 0) = f(\pi),$$

то и при $x = \pi$ имеет место аналогичное обстоятельство.

Иначе обстоит дело с разложением по синусам. Не вдаваясь в соображения относительно нарушения непрерывности условием (20) и т. п., мы просто заметим, что в точках $x = 0$ и $x = \pi$ сумма ряда (17) явно будет нулем. Поэтому она может дать нам значения $f(0)$ и $f(\pi)$, очевидно, лишь в том случае, если и эти значения равны нулю.

Если функция $f(x)$ задана в промежутке $[0, l]$ $(l>0)$, то, прибегнув к той же замене переменной, что и в n° **404**, мы сведем вопрос о разложении ее в ряд по косинусам

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

или в ряд по синусам

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

к только что рассмотренному. При этом коэффициенты разложений вычисляются, соответственно, по формулам

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{21}$$

или

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{22}$$

406. Примеры. Функции, которые ниже приводятся в виде примеров, как правило, относятся к классу дифференцируемых или кусочно-дифференцируемых. Поэтому самая возможность их разложения в ряд Фурье — вне сомнения, и мы на этом вопросе останавливаться не будем.

1) Разложить функцию

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

в промежутке $(0, 2\pi)$.

По формулам (1а) n° **399**:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

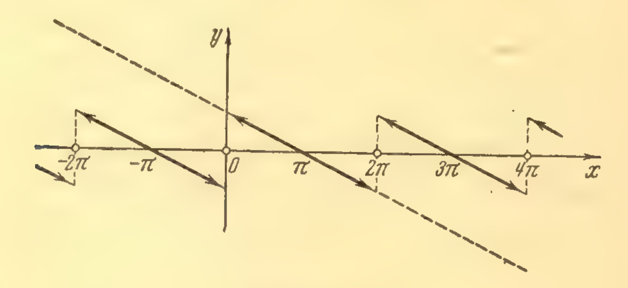
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+$$
$$+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=0,$$
$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-$$
$$-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}.$$

Таким образом, мы приходим к замечательному по простоте разложению, содержащему одни лишь синусы:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

При $x = 0$ (или 2π) сумма ряда равна нулю, и равенство нарушается. Не будет равенства и вне указанного промежутка. График суммы ряда $S(x)$ (черт. 76) состоит из бесчисленного множества параллельных отрезков и ряда отдельных точек на оси x.



Черт. 76.

2) Из разложения в 1) уже без вычислений можно получить и другие интересные разложения. Заменяя в нем x на $2x$ и деля обе части равенства на 2, найдем:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \qquad (0 < x < \pi),$$

вычитая же одно разложение из другого, получим

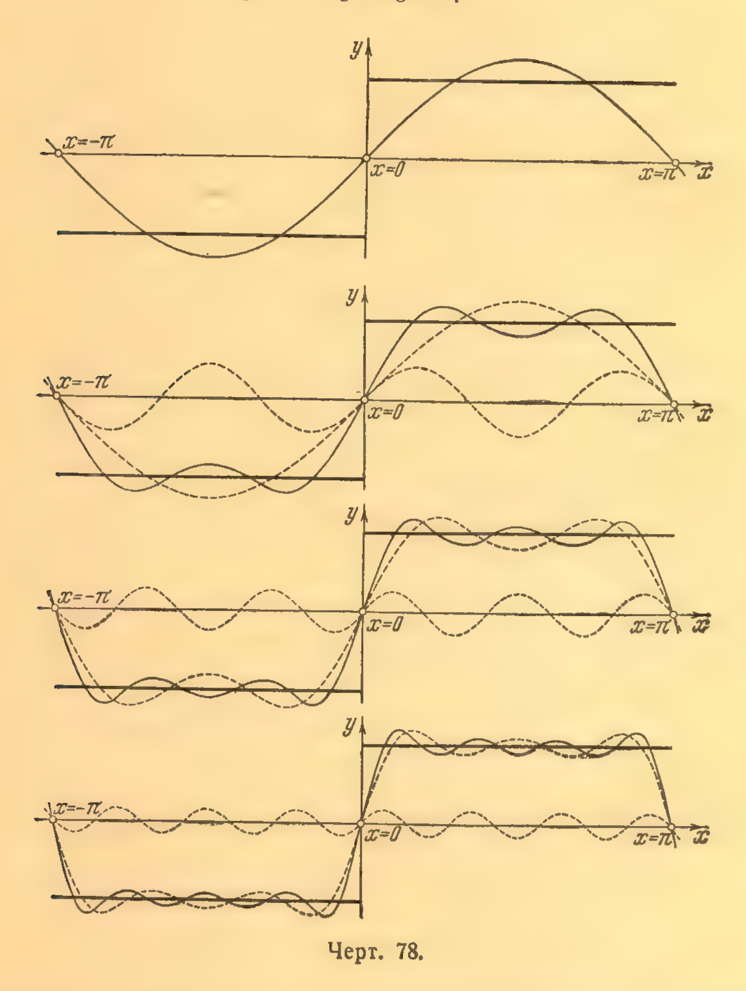
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)\, x}{2k-1} \qquad (0 < x < \pi).$$

Если через $S(x)$ обозначить сумму последнего ряда, то $S(0) = S(\pi) = 0$. Изменяя знак x, для промежутка $(-\pi, 0)$ по нечетности синуса найдем, что $S(x) = -\frac{\pi}{4}$; для прочих же значений x сумма $S(x)$ получается по закону периодичности, так что, в частности, для промежутка $(2\pi, 3\pi)$ снова $S(x) = \frac{\pi}{4}$, и т. д. График функции $S(x)$ изображен на черт. 77; чертеж же 78 характеризует постепенное приближение к этой разрывной функции частичных сумм ряда.

Черт. 77.

Замечание. Если положить в рассматриваемом разложении $x=\frac{\pi}{2}$, то получим уже известный нам ряд Лейбница [n° 255, (20)]

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

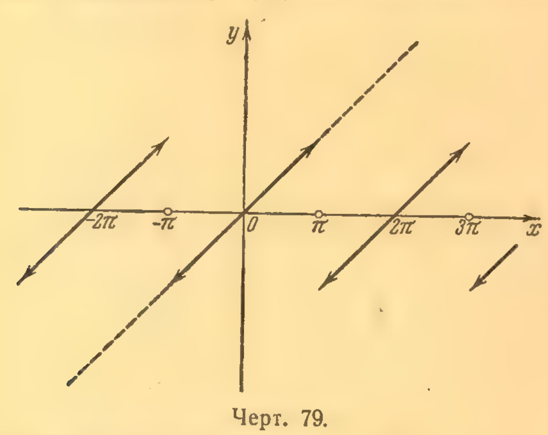


Черт. 78.

Сочетая полученное здесь разложение с разложением в 1), легко прийти к ряду для функции

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi<x<\pi).$$

Непосредственно мы получаем его лишь для $0 < x < \pi$, но равенство явно имеет место для $x = 0$ и, кроме того, обе его части, очевидно, представляют нечетные функции, так что окончательно разложение оказывается верным для всего промежутка $(-\pi, \pi)$.



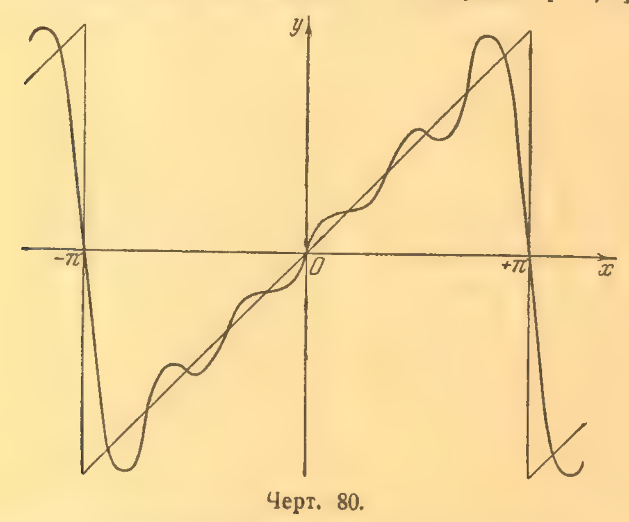
Черт. 79.

График суммы ряда при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ легко себе представить по черт. 79. На черт. 80 приведен график частичной суммы

$$y = s_5(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}\right).$$

3) Разложить:

(а) четную функцию $f_1(x) = \cos ax$ по косинусам в $[-\pi, \pi]$,



Черт. 80.

(б) нечетную функцию $f_2(x) = \sin ax$ по синусам в $(-\pi, \pi)$ (число a здесь предполагается не целым).

(а) Имеем

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\,dx=\frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

$$(n>0) \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(a+n)x+\cos(a-n)x]\,dx=(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\,\frac{\sin a\pi}{\pi},$$

так что

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos ax}{\sin a\pi}=\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2} \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

(б) *Ответ.*

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\sin ax}{\sin a\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2} \qquad (-\pi<x<\pi).$$

Замечание. Отметим попутно, что при $x=0$ из (а) получается:

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{a\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

или, если положить $a\pi=z$:

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}=$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right]$$

(здесь z — любое число, отличное от кратного π). Мы пришли к «разложению на простые дроби» функции $\frac{1}{\sin z}$ (которым мы уже пользовались в n° **293**, 3° и **308**, 1°). Полагая же в (а) $x=\pi$, можно получить «разложение на простые дроби» функции $\operatorname{ctg} z$:

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}=$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right].$$

4) Разложить функцию

$$f(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}$$

по косинусам в промежутке $[0, \pi]$.

Легко вычислить, по формулам (16):

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)dx=-\frac{\pi^2}{6}$$

и далее (дважды интегрируя по частям)

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi(x-\pi)\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(x-\pi)\cos nx\Bigg|_0^\pi-\frac{1}{n^2\pi}\int_0^\pi\cos nx\,dx=\frac{1}{n^2}\ (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Разложение

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}=-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},$$

выведенное для промежутка $[0, \pi]$, на деле имеет место даже в промежутке $[0, 2\pi]$, поскольку обе части равенства не меняют своего значения при замене x на $2\pi-x$.

Замечание. Если положить здесь $x=0$, то получим знаменитый ряд Эйлера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

407. Разложение непрерывной функции в ряд тригонометрических многочленов. При доказательстве теоремы о разложении в ряд Фурье [n° 402] мы — для простоты — ограничились кусочно-дифференцируемыми функциями. На деле класс функций, допускающих такое разложение, значительно шире, но все же в него входят не все непрерывные функции с периодом 2π! [См. n° 424.] В некотором смысле здесь создается положение, сходное с тем, о котором была речь в n° 278 по отношению к разложению функции в степенной ряд. И наряду с (изложенной там) теоремой Вейерштрасса о разложении произвольной непрерывной функции в равномерно сходящийся ряд из алгебраических многочленов, тем же автором была доказана и вторая теорема — о разложении произвольной непрерывной функции с периодом 2π в равномерно сходящийся ряд из тригонометрических многочленов, т. е. из сумм вида

$$A_0+\sum_{k=1}^{m}(A_k\cos kx+B_k\sin kx). \tag{23}$$

Таким образом, как и выше, расширение области применимости разложения достигается за счет усложнения характера самих членов разложения: вместо одночленных выражений простого вида появляются многочленные суммы их.

Вторую теорему Вейерштрасса мы, как и первую, сформулируем на языке последовательностей:

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\pi, \pi]$ и имеет период 2π:*

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

то существует последовательность тригонометрических многочленов, которая в этом промежутке равномерно сходится к $f(x)$ *).

Начнем доказательство теоремы с простого замечания, что произведение двух тригонометрических многочленов типа (23) тоже может быть представлено в виде тригонометрического многочлена. Это непосредственно следует из того, что всевозможные произведения—

$$\cos kx \cdot \cos lx, \quad \cos kx \cdot \sin lx, \quad \sin kx \cdot \sin lx$$

по известным формулам тригонометрии — представляются в виде таких многочленов, например,

$$\cos kx \cdot \cos lx = \frac{1}{2}\cos(k+l)x + \frac{1}{2}\cos(k-l)x.$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что для всех x в промежутке $[-\pi, \pi]$ будет

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{24}$$

Это легко установить для случая *четной функции* $f(x)$. Используя первую теорему Вейерштрасса [n° 278], мы прежде всего построим такой алгебраический многочлен $P(t)$, чтобы для всех значений t в промежутке $[-1, 1]$ было

$$|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon \text{ **)}.$$

Полагая здесь $t = \cos x$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi$, получим для всего этого промежутка

$$|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon.$$

Ввиду четности функций $f(x)$ и $\cos x$, это неравенство сохранится и при замене x на $-x$, т. е. будет выполняться для всех значений x в промежутке $[-\pi, \pi]$, а в силу периодичности — и во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$. Так как — по замечанию вначале — выражение $P(\cos x)$ может быть написано в виде тригонометрического многочлена, то для рассматриваемого случая наше утверждение оправдано.

Обратимся теперь к общему случаю — *произвольной непрерывной функции $f(x)$ с периодом 2π*. Для четных функций

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \cdot \sin x$$

по доказанному, существуют такие тригонометрические многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$, что

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

---

*) Мы будем представлять себе функцию $f(x)$ периодически распространенной на весь промежуток $(-\infty, +\infty)$.

**) Напомним, что значения $\arccos t$ заполняют промежуток $[0, \pi]$.

Отсюда следует

$$|f_1 \sin^2 x - T_1 \cdot \sin^2 x| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2 \sin x - T_2 \cdot \sin x| < \frac{\varepsilon}{4},$$

а затем, если сложить эти неравенства:

$$|f(x) \cdot \sin^2 x - T_3(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{25}$$

где $T_3(x)$ есть тригонометрический многочлен

$$T_3 = T_1 \cdot \sin^2 x + T_2 \cdot \sin x$$

[см. замечание].

Подобным же образом и для функции $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ найдется тригонометрический многочлен $T_4(x)$, такой, что

$$\left|f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin^2 x - T_4(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заменяя здесь x на $x - \frac{\pi}{2}$ и обозначая через $T_5(x)$ тригонометрический многочлен, который при этой замене получится из $T_4(x)$, найдем, что

$$|f(x) \cdot \cos^2 x - T_5(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

Наконец, из (25) и (26) сложением получим (24), полагая $T = T_3 + T_5$. Теорема доказана.

Можно сформулировать эту теорему и на языке рядов [ср. n° 278]:

Непрерывная функция $f(x)$, с периодом 2π, может быть разложена в равномерно сходящийся к ней ряд, состоящий из тригонометрических многочленов.

§ 3. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

408. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье. Мы хотим воспроизвести здесь в существенных чертах те замечательные по их прозрачности, хотя и лишенные строгости, соображения, которые привели Фурье к его интегральной формуле *).

Если функция $f(x)$ задана в конечном промежутке $[-l, l]$, то при определенных условиях, которые нас здесь не интересуют, ее можно представить в этом промежутке тригонометрическим рядом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l},$$

где

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{m\pi u}{l}\,du, \qquad b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{m\pi u}{l}\,du.$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots) \qquad\qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

---

*) Эта формула, независимо от Фурье, была получена и Коши.

[см. n° 404]. Подставляя вместо коэффициентов a_m и b_m их выражения, можно переписать ряд в виде

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{m\pi}{l}(u-x)\,du. \qquad (1)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ будет определена во всем бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$. В этом случае, каково бы ни было x, соответствующее значение $f(x)$ выразится разложением (1) при любом $l>|x|$. Переходя здесь к пределу при $l\to+\infty$, попытаемся установить «предельную форму» этого разложения.

Про первый член правой части равенства (1) естественно считать, что он стремится к нулю *). Обращаясь же к бесконечному ряду, мы можем рассматривать множители $\frac{m\pi}{l}$ под знаком косинуса как дискретные значения

$$z_1=\frac{\pi}{l},\quad z_2=\frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ z_m=\frac{m\pi}{l},\ \ldots$$

некоей переменной z, непрерывно меняющейся от $z_0=0$ до $+\infty$; при этом приращение

$$\Delta z_m=z_{m+1}-z_m=\frac{\pi}{l},$$

очевидно, стремится к нулю при $l\to+\infty$. В этих обозначениях наш ряд перепишется так:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\Delta z_{m-1}\int_{-l}^{l} f(u)\cos z_m(u-x)\,du.$$

Он напоминает интегральную сумму для функции

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du$$

от z в промежутке $[0, +\infty]$. Переходя к пределу при $l\to+\infty$, вместо ряда получим интеграл; таким путем и приходим к интегральной формуле Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dz\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du.$$

---

*) Это становится очевидным, например, если предположить, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du$ сходится.

Можно представить эту формулу, раскрывая выражение косинуса разности, и в виде

$$f(x)=\int_0^\infty [a(z)\cos zx + b(z)\sin zx]\,dz,$$

где

$$a(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos zu\,du, \qquad b(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin zu\,du.$$

Здесь ясно обнаруживается аналогия с тригонометрическим разложением: лишь параметр m, пробегающий ряд натуральных значений, заменен здесь непрерывно изменяющимся параметром z, а бесконечный ряд — интегралом. Коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ также по своей структуре напоминают коэффициенты Фурье.

Конечно, все эти соображения имеют характер лишь наведения; действительные условия справедливости формулы Фурье еще подлежат выяснению. Но и при проведении строгих рассуждений мы будем следовать основным этапам рассуждений, связанных с рядами Фурье.

409. Предварительные замечания. *Относительно функции $f(x)$ предположим теперь, что* 1) *она кусочно-непрерывна в каждом конечном промежутке и* 2) *абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке* $[-\infty, +\infty]$. В этом предположении рассмотрим интеграл

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^A dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du,$$

где A есть произвольное конечное положительное число, а x_0 — любое фиксированное значение x. Этот интеграл представляет аналог частичной суммы ряда Фурье: из него интеграл Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du \tag{2}$$

получается в пределе при $A\to+\infty$.

При любом конечном $B>0$, по теореме 4 n° 298, будем иметь

$$\int_0^A dz \int_{-B}^{B} f(u)\cos z(u-x_0)\,du = \int_{-B}^{B} f(u)\,du \int_0^A \cos z(u-x_0)\,dz =$$
$$= \int_{-B}^{B} f(u)\,\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}\,du. \tag{3}$$

Это непосредственно следует из упомянутой теоремы, если функция $f(u)$ в промежутке $[-B, B]$ непрерывна; в противном случае теорему пришлось бы применить, в отдельности, к каждому из тех промежутков, в которых функция непрерывна.

Но интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x_0)\,du \tag{4}$$

мажорируется сходящимся по предположению интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du$$

и, следовательно, сходится равномерно относительно z (как при $u=+\infty$, так и при $u=-\infty$) для любого промежутка его значений. Таким образом, интеграл

$$\int_{-B}^{B} f(u) \cos z(u-x_0)\, du$$

при $B \to +\infty$ стремится к своему пределу (4) равномерно. Поэтому, переходя в равенстве (3) к пределу при $B \to +\infty$, в интеграле слева предельный переход можно выполнить под знаком интеграла [теорема 1 n° 296] *). Отсюда для $J(A)$ получается выражение в виде интеграла

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}\, du,$$

напоминающего интеграл Дирихле [n° 399] и, в действительности, играющего такую же точно роль. Элементарным преобразованием его легко привести к виду

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}\, dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\, dt. \tag{5}$$

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующее очевидное дополнение к основной лемме n° 400:

Если функция $g(t)$ кусочно-непрерывна в каждой конечной части промежутка $[a, +\infty]$ и абсолютно интегрируема в этом бесконечном промежутке, то

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{a}^{+\infty} g(t)\sin pt\, dt=0$$

(равно как и

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{a}^{+\infty} g(t)\cos pt\, dt=0).$$

Действительно, задавшись произвольным числом $\varepsilon>0$, мы сначала выберем A столь большим, чтобы было

$$\int_{A}^{+\infty} |g(t)|\, dt<\frac{\varepsilon}{2},$$

*) Ср. теорему 4 n° 305, где подинтегральную функцию мы предполагали непрерывной. Здесь мы такого предположения не делаем.

а значит и подавно

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} g(t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \int\limits_A^{+\infty} |g(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

и притом — каково бы ни было p. А затем, к интегралу

$$\int\limits_a^A g(t)\sin pt\,dt$$

приложим непосредственно лемму n° **400**, так что для достаточно больших p будет

$$\left|\int\limits_a^A g(t)\sin pt\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

для тех же значений p, очевидно,

$$\left|\int\limits_a^{\infty} g(t)\sin pt\,dt\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

410. Представление функции интегралом Фурье. Совершенно аналогично теореме n° **402** и здесь имеет место

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема в каждом конечном промежутке и, к тому же, абсолютно интегрируема в промежутке $[-\infty, +\infty]$. Тогда в каждой точке $x = x_0$ ее интеграл Фурье сходится и имеет значение*

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

(которое, очевидно, обращается в $f(x_0)$, если функция в точке $x = x_0$ непрерывна).

Доказательство. Умножив обе части равенства

$$1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin At}{t}\,dt \qquad (A>0)$$

[n° **293**, замечание; n° **308**, 2°] на постоянное число S_0, вычтем результат почленно из равенства (5); мы получим

$$J(A) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} [f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]\,\frac{\sin At}{t}\,dt. \quad (6)$$

Взяв постоянное число $h>0$, перепишем интеграл этот в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^h \left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}\right]\sin At\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_h^{\infty} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin At\,dt - \frac{2S_0}{\pi}\int\limits_h^{\infty}\frac{\sin At}{t}\,dt.$$

Стремление к нулю при $A \to \infty$ первого интеграла устанавливается так же, как и при доказательстве теоремы n° **402**. Во втором интеграле дробное выражение, вместе с f, представляет кусочно-непрерывную функцию в любой конечной части промежутка $[h, \infty]$; к тому же эта функция абсолютно интегрируема в названном промежутке. Следовательно, по замечанию в конце предыдущего n°, и второй интеграл имеет при $A \to \infty$ пределом нуль. Наконец, полагая в последнем интеграле $At = z$, приведем его к виду

$$-\frac{2S_0}{\pi}\int_{Ah}^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz,$$

так что и он при $A \to \infty$ стремится к нулю. Отсюда заключаем, что выражение (6) при $A \to \infty$ имеет пределом нуль, т. е. существует интеграл (2) и равен S_0.

411. Различные виды формулы Фурье. Предполагая выполненными указанные выше условия применимости формулы Фурье, будем считать для простоты, что в рассматриваемой точке x функция $f(x)$ непрерывна или, если разрывна, то удовлетворяет условию

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Тогда во всяком случае имеем

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du. \tag{7}$$

Ввиду того, что внутренний интеграл явно представляет собой четную функцию от z, эту формулу можно переписать и так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos z(u-x)\,du. \tag{8}$$

Легко показать далее, что при сделанных в n° **410** общих предположениях относительно функции $f(x)$ существует и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin z(u-x)\,du. \tag{9}$$

Этот интеграл, к тому же, является непрерывной функцией от z и, очевидно, нечетной.

Вообще говоря, для этой функции уже нельзя ручаться за существование несобственного интеграла от $-\infty$ до $+\infty$.

В случае, когда для какой-нибудь функции $\varphi(z)$ не существует интеграла от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. предела

$$\lim_{\substack{M \to \infty \\ N \to \infty}} \int_{-M}^{N} \varphi(z)\,dz$$

при независимом стремлении M и N к бесконечности, может оказаться существующим предел, отвечающий частному предположению $M = N$. Такой предел, следуя Коши, называют *главным значением интеграла* и обозначают буквами V. p. (Valeur principale)

$$\text{V. p.} \int_{\infty}^{+\infty} \varphi(z)\,dz = \lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} \varphi(z)\,dz,$$

Если интеграл существует в согласии с обычным определением несобственного интеграла, то он, очевидно, совпадает с его главным значением.

Ввиду нечетности функции (9) от z, будем иметь

$$\int_{-M}^{M} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u-x)\, du = 0,$$

и в пределе при $M \to \infty$ тоже получится нуль. Итак, во всяком случае

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin z(u-x)\, du = 0.$$

Умножая это равенство на $\frac{i}{2\pi}$ и складывая с (8), придем к соотношению

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{iz(u-x)}\, du, \tag{10}$$

где наружный интеграл понимается в смысле главного значения. В этом виде формула была впервые представлена Коши.

Возвращаясь к формуле (7), напишем ее в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos zx\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu\, du + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin zx\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu\, du.$$

Если $f(u)$ есть четная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos zu\, du = 2 \int_{0}^{\infty} f(u) \cos zu\, du, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin zu\, du = 0,$$

и мы получим упрощенную формулу, содержащую лишь косинусы:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos zx\, dz \int_{0}^{\infty} f(u) \cos zu\, du. \tag{11}$$

Аналогично, в случае нечетной функции $f(x)$ мы приходим к формуле, содержащей лишь синусы:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin zx\, dz \int_{0}^{\infty} f(u) \sin zu\, du. \tag{12}$$

Пусть теперь функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0, +\infty]$ и удовлетворяет в этом промежутке условиям, аналогичным тем, которые раньше были поставлены по отношению ко всему промежутку $(-\infty, +\infty)$. Тогда,

распространяя функцию $f(x)$ на промежуток $(-\infty, 0)$ с помощью равенств $(x>0)$:

$$f(-x)=f(x) \quad \text{или} \quad f(-x)=-f(x),$$

мы получим в первом случае четную, а во втором — нечетную функцию в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Для положительных значений x мы можем, таким образом, пользоваться как формулой (11), так и формулой (12).

Если в точке $x=0$ предположить функцию $f(x)$ непрерывной, то формула (11) и в этой точке приложима, ибо продолженная четным образом функция сохранит здесь непрерывность. Формула же (12) вообще в точке $x=0$ неприложима: она воспроизводит значение $f(0)$ лишь в том случае, если это значение есть нуль.

Эти соображения вполне аналогичны сказанному в п° 405 о рядах Фурье.

412. Преобразование Фурье. При наших предположениях формула Фурье (10) имеет место для всех значений x в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Эту формулу можно себе представить, как суперпозицию таких двух формул:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{izu}\,du, \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\,e^{-ixz}\,dz\,^{*}). \tag{13}$$

Функция $F(z)$, сопоставляемая по первой формуле функции $f(x)$, называется ее преобразованием Фурье. В свою очередь по второй формуле *функция $f(x)$ является (обратным) преобразованием Фурье* (разница в знаке при i!) для функции $F(x)$. Заметим, что функция F будет, вообще говоря, комплексной даже при вещественной f; впрочем, можно было бы здесь и исходную функцию f предположить комплексной.

Равенство

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\,e^{-ixz}\,dz,$$

где функция $f(x)$ дана, можно рассматривать, как *интегральное уравнение* относительно неизвестой функции $F(z)$, стоящей под знаком интеграла. Решение уравнения доставляется формулой

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{izu}\,du.$$

Естественно, эти равенства можно и поменять ролями.

Обратимся теперь к формуле (11); она выполняется для всех положительных значений x, и ее можно представить, как суперпозицию двух — на этот раз вещественных и совершенно симметричных! — формул

$$\left.\begin{aligned} F_c(z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(u)\cos zu\,du,\\ f(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(z)\cos xz\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

---

*) Последний интеграл, если сделаны лишь те предположения относительно $f(x)$, о которых была речь выше, понимается в смысле «главного значения».

Аналогично и формула (12) может быть разложена на две:

$$\left.\begin{aligned} F_s(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \sin zu \, du, \\ f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(z) \sin xz \, dz. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Функции $F_c(z)$ *и* $F_s(z)$ *называются, соответственно, косинус-преобразованием или синус-преобразованием Фурье для функции* $f(x)$. Как видим, функция f по F_c (или F_s) получается совершенно так же, как и F_c (F_s) по f. Иными словами, функции f и F_c (F_s) взаимно являются косинус- (синус-) преобразованиями. Коши назвал пары функций f и F_c или f и F_s, соответственно, сопряженными функциями первого и второго рода. И здесь также каждое из равенств (14) [или (15)] можно рассматривать, как *интегральное уравнение,* в котором функция вне интеграла дана, а функция под знаком интеграла разыскивается; решение дается другим равенством.

Сопоставляя функции F, F_c и F_s, можно сказать следующее. В случае четной функции $f(x)$ имеем

$$F(z) = F_c(z)$$

(на значения $z < 0$ функция $F_c(z)$ распространяется четным образом), а в случае нечетной $f(x)$:

$$F(z) = iF_s(z)$$

(на значения $z < 0$ функция $F_s(z)$ распространяется нечетным образом). В общем случае функция $f(x)$ разлагается на сумму четной и нечетной функций:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Тогда

$$F(z) = G_c(z) + iH_s(z) \text{ *)}.$$

В связи с этим обстоятельством достаточно ограничиться примерами косинус- и синус-преобразований.

1) Пусть функция $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0,\ x \geqslant 0)$; тогда ее косинус-преобразованием будет функция

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-az} \cos zx \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2},$$

а синус-преобразованием — функция

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-az} \sin zx \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}.$$

*) $G_c(z)$ обозначает косинус-преобразование для функции $g(x)$, а $H_s(z)$ — синус-преобразование для функции $h(x)$.

Так как e^{-ax} интегрируема в промежутке $[0, \infty]$, то должны иметь место и взаимные соотношения:

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos zx}{a^2+z^2}\,dz = e^{-ax} \qquad (x \geqslant 0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{z\sin zx}{a^2+z^2}\,dz = e^{-ax} \qquad (x > 0)$$

или

$$\int_0^\infty \frac{\cos xz}{a^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}, \quad \int_0^\infty \frac{z\sin xz}{a^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}e^{-ax}.$$

Мы узнаем в этих интегралах известные уже нам *интегралы Лапласа* [n° 308, 4°].

Таким образом, в лице пар функций

$$e^{-ax}, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+z^2} \quad \text{и} \quad e^{-ax}, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a^2+x^2}$$

мы имеем здесь примеры сопряженных функций первого и второго рода (по Коши). Если бы интегралы Лапласа нам не были известны, то изложенная теория открыла бы путь к их вычислению.

2) Рассмотрим теперь функцию, определенную равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad 0 \leqslant x < a \\ \frac{1}{2} & \text{для} \quad x = a \\ 0 & \text{для} \quad x > a \end{cases} \qquad (a > 0)$$

В этом случае

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos zx\,dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ax}{x}.$$

Желая и на этом примере проверить формулу Фурье, найдем косинус-преобразование для полученной функции:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin az}{z}\cos zx\,dz.$$

Если переписать этот интеграл в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a+x)z}{z}\,dz + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a-x)z}{z}\,dz,$$

то сразу становится ясным [n° 293, замечание], что его значение, действительно, совпадает с исходной функцией $f(x)$!

§ 4. ЗАМКНУТОСТЬ И ПОЛНОТА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

413. Приближение функций в среднем. Экстремальные свойства отрезков ряда Фурье. Если для какой-либо функции $f(x)$, в качестве ее приближения в промежутке $[a, b]$, рассматривают другую функцию $g(x)$, то *точность* этого приближения можно оценивать по-разному. В основу, естественно, кладется рассмотрение разности

$$r(x) = f(x) - g(x).$$

В тех случаях, когда мы одинаково заинтересованы в малом отклонении одной из этих функций от другой во всех отдельно взятых точках, за меру близости принимают их *максимальное отклонение*

$$\delta = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |r(x)|.$$

Однако часто предпочитают, вместо «равномерной» близости функции во всех точках, рассматривать лишь близость их «в среднем». В этом случае за меру близости их берут их *среднее отклонение*

$$\delta' = \frac{1}{b-a} \int_a^b |r(x)|\, dx$$

или, чего мы и будем держаться в последующем, *среднее квадратическое отклонение*

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b r^2(x)\, dx}.$$

Вместо этого выражения, впрочем, удобнее рассматривать более простую величину:

$$\Delta = \int_a^b r^2(x)\, dx = (b-a)\, \delta''^2.$$

Обратимся вновь к рассмотрению произвольной ортогональной в промежутке $[a, b]$ системы функций $\{\varphi_m(x)\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ [n° **398**]. Пусть $f(x)$ — заданная в том же промежутке функция *) и n — фиксированное натуральное число. Поставим себе такую задачу: *из всех линейных комбинаций первых* $n+1$ *функций* φ:

$$\sigma_n(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \qquad (1)$$

*) Как обычно, мы все рассматриваемые функции, и φ_m, и f будем считать непрерывными или — более общó — кусочно-непрерывными.

при произвольном наборе коэффициентов $C_0, C_1, \ldots, C_n$ *найти ту, которая осуществляет* *наилучшее* — в смысле среднего квадратического отклонения — *приближение к функции* $f(x)$. Иными словами, требуется добиться наименьшего значения для величины

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2 \, dx.$$

Подставив сюда вместо $\sigma_n(x)$ ее развернутое выражение, получим

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)\, dx - 2 \sum_{m=0}^{n} C_m \int_a^b f(x)\, \varphi_m(x)\, dx + \\ + \sum_{m=0}^{n} C_m^2 \int_a^b \varphi_m^2(x)\, dx + 2 \sum_{k<m} C_k C_m \int_a^b \varphi_k(x)\, \varphi_m(x)\, dx.$$

Последняя сумма исчезает ввиду ортогональности нашей системы. Вводя постоянные

$$\lambda_m = \int_a^b \varphi_m^2(x)\, dx$$

и (обобщенные) коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m} \int_a^b f(x)\, \varphi_m(x)\, dx,$$

можно переписать выражение для Δ_n в виде

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)\, dx - 2 \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m C_m + \sum_{m=0}^{n} \lambda_m C_m^2.$$

Чтобы под знаком суммы получить полные квадраты, нужно ввести туда еще члены $\lambda_m c_m^2$. Добавив их с плюсами и с минусами, окончательно получим:

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)\, dx - \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 + \sum_{m=0}^{n} \lambda_m (C_m - c_m)^2.$$

Теперь ясно, что Δ_n достигает своего **наименьшего** значения тогда, когда обращается в нуль последняя сумма, а это будет при

$$C_0 = c_0, \quad C_1 = c_1, \ldots, \quad C_n = c_n.$$

Таким образом, *из всех многочленов вида* (1) *именно отрезок (обобщенного) ряда Фурье*

$$s_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$$

доставляет величине Δ_n *наименьшее возможное для нее значение*

$$\delta_n = \int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2. \tag{2}$$

Снова наше внимание приковывается к коэффициентам Фурье как, в некотором смысле, «лучшим» из всех возможных! Важно отметить при этом, что коэффициенты, оказавшиеся «лучшими» при фиксированном n, сохраняют свою роль и при бо́льших значениях n, к ним лишь присоединяются еще новые коэффициенты!

Равенство (2) называют *тождеством Бесселя.* Из него получаются неравенства

$$\sum_{m=0}^{n} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx$$

и (если перейти к пределу при $n \to \infty$)

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{3}$$

Это — *неравенство Бесселя.* Любопытно, что ряд в (3) оказывается всегда сходящимся, какова бы ни была функция $f(x)$ рассматриваемого класса.

При возрастании n величина δ_n убывает, поскольку в ее выражении (2) добавляются новые отрицательные слагаемые. Чем больше n, тем ближе сумма $s_n(x)$ «в среднем» подходит к рассматриваемой функции $f(x)$. Естественно возникает вопрос: можно ли за счет увеличения n добиться сколь угодно малого среднего квадратического отклонения, т. е. *стремится ли* δ_n *к* 0 *при* $n \to \infty$?

Если это выполняется, то говорят, что сумма $s_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ «в среднем» (что — подчеркнем это — вовсе не предполагает «точечной» сходимости $s_n(x)$ к $f(x)$ в обычном смысле слова). Из тождества Бесселя ясно, что *сходимость в среднем суммы* $s_n(x)$ *к функции* $f(x)$ *равносильна наличию равенства* [ср. (3)]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{4}$$

Это равенство называется *уравнением замкнутости*. Если оно выполняется для каждой непрерывной функции $f(x)$, то самое систему $\{\varphi_n(x)\}$ называют *замкнутой*.

414. Замкнутость тригонометрической системы. Применим теперь все сказанное, в частности, к тригонометрической системе функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots,\ \cos mx,\ \sin mx, \ldots \tag{5}$$

в промежутке $[0, 2\pi]$ *).

Вместо суммы вида (1) здесь придется рассматривать тригонометрические многочлены

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{n} (A_m \cos mx + B_m \sin mx). \tag{1a}$$

Осуществляемое ими приближение к функции $f(x)$ «в среднем» характеризуется величиной

$$\Delta_n = \int_0^{2\pi} [f(x) - T_n(x)]^2\, dx.$$

Как следует из общего рассуждения, *при фиксированном n наименьшее значение этой величине доставляет соответствующий отрезок ряда Фурье*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

Само же наименьшее значение выражается равенством

$$\delta_n = \int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \pi\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2)\right\}, \tag{2a}$$

которое и представляет *тождество Бесселя* для системы (5). Из него, как и в общем случае, вытекает сходимость ряда, составленного из квадратов коэффициентов Фурье, и *неравенство Бесселя*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx. \tag{3a}$$

---

*) Нам удобнее в дальнейшем в качестве основного иметь в виду именно промежуток $[0, 2\pi]$.

Но для рассматриваемой конкретной системы тригонометрических функций этот результат может быть уточнен, и вопрос, поставленный в конце предыдущего номера, решается полностью. Именно, имеет место следующая важная

Теорема. *Какова бы ни была кусочно-непрерывная в промежутке* $[0, 2\pi]$ *функция* $f(x)$, *для нее*

$$\lim \delta_n = \lim \int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2\, dx = 0,$$

так что сумма $s_n(x)$ *сходится к функции* $f(x)$ *«в среднем».*

Иными словами: *для упомянутой функции* $f(x)$ *всегда выполняется уравнение замкнутости*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx \text{ *)}. \tag{4a}$$

При доказательстве мы будем пользоваться обеими равносильными формулировками в зависимости от удобства. Мы проведем доказательство в несколько этапов.

1°. Установим сначала одно вспомогательное неравенство. Рассмотрим две кусочно-непрерывные функции $\bar{f}(x)$, $\bar{\bar{f}}(x)$, и пусть $f(x) = \bar{f}(x) \pm \bar{\bar{f}}(x)$. Обозначая черточками наверху величины, относящиеся к функциям $\bar{f}$ и $\bar{\bar{f}}$, очевидно, будем иметь

$$f - s_n = (\bar{f} - \bar{s}_n) \pm (\bar{\bar{f}} - \bar{\bar{s}}_n).$$

Из элементарного неравенства $(a \pm b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$ следует, что

$$(f - s_n)^2 \leqslant 2\,[(\bar{f} - \bar{s}_n)^2 + (\bar{\bar{f}} - \bar{\bar{s}}_n)^2],$$

а отсюда

$$\int_0^{2\pi} (f - s_n)^2\, dx \leqslant 2 \left\{ \int_0^{2\pi} (\bar{f} - \bar{s}_n)^2\, dx + \int_0^{2\pi} (\bar{\bar{f}} - \bar{\bar{s}}_n)^2\, dx \right\}. \tag{6}$$

Если при $n \to \infty$ оба интеграла справа стремятся к 0, то и интеграл слева будет стремиться к 0. Иными словами: *если уравнение замкнутости выполняется порознь для двух функций* $\bar{f}$ *и* $\bar{\bar{f}}$, *то оно выполняется и для их суммы или разности* $f = \bar{f} \pm \bar{\bar{f}}$. Этот результат, очевидно, будет справедлив и для суммы нескольких функций.

---

*) Хотя рассмотрение близких к этому соотношению вопросов относится еще к началу XIX века, но первое строгое доказательство его, повидимому, было дано лишь в 1892 г. де ла Валле Пуссеном. Особенно много занимался общей теорией замкнутости ортогональных систем функций и ее приложениями русский математик академик Владимир Андреевич Стеклов (1863—1926). Ему принадлежит и самый термин «уравнение замкнутости».

2°. Рассмотрим теперь простую функцию $f_\alpha(x)$, принимающую лишь два значения:

$$f_\alpha(x) = \begin{vmatrix} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \alpha, \\ 0 & \text{— в прочих точках.} \end{vmatrix} \quad (0 < \alpha \leqslant 2\pi)$$

Для нее легко непосредственно проверить выполнение уравнения замкнутости, опираясь на известное нам разложение [см. n° 406, 4) и замечание]:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - 1}{n^2}.$$

Действительно, для нашей функции

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha dx = \frac{\alpha}{\pi}; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \cos nx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin n\alpha}{n};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos n\alpha}{n},$$

так что

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha + (1 - \cos n\alpha)^2}{n^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha^2}{2\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4}\right] = \frac{\alpha}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [f_\alpha(x)]^2\, dx.$$

Очевидно, формула (4а) остается верной и в том случае, если значение 1 будет заменено любым другим постоянным значением c.

3°. Пусть $f_{\alpha\beta}(x) = f_\beta(x) - f_\alpha(x)$ $(0 < \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$; поскольку для функций f_α и f_β уравнение замкнутости выполняется, оно выполнится, в силу 1°, и для их разности $f_{\alpha\beta}$, которая принимает значение 1 внутри промежутка $[\alpha, \beta]$ и значение 0 вне него; и здесь значение 1 может быть заменено любой постоянной c.

Рассмотрим теперь произвольную *кусочно-постоянную* функцию $\bar{f}(x)$ *). Поскольку она — с точностью до значений в конечном

*) Это значит, что основной промежуток разлагается на конечное число частей, внутри каждой из которых функция сохраняет постоянное значение.

числе точек — может быть представлена в виде суммы нескольких функций только что рассмотренного типа, то и для нее, в силу 1°, равенство (4а) справедливо.

4°. Переходя, наконец, к произвольной *кусочно-непрерывной* функции, мы можем снова — с точностью до значений в конечном числе точек — рассматривать ее как сумму функций $f(x)$, каждая из которых непрерывна в некотором промежутке $[\alpha, \beta]$, где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$, и равна 0 вне него. В силу 1°, для доказательства теоремы достаточно установить справедливость уравнения замкнутости для любой функции этого типа.

Предварительно преобразуем несколько неравенство (6). Именно из тождества Бесселя (2а) — если применить его к функции $\bar{\bar{f}}$ — ясно, что

$$\int_0^{2\pi} [\bar{\bar{f}}(x) - \bar{\bar{s}}_n(x)]^2\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} [\bar{\bar{f}}(x)]^2\, dx.$$

Поэтому неравенство (6) лишь усилится, если написать его в виде

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2\, dx \leqslant 2\left\{ \int_0^{2\pi} [\bar{f}(x) - \bar{s}_n(x)]^2 + \int_0^{2\pi} [\bar{\bar{f}}(x)]^2\, dx \right\}, \quad (7)$$

при этом мы считаем попрежнему $f = \bar{f} + \bar{\bar{f}}$.

Возвращаясь к функции f, о которой речь была выше, покажем, что для нее может быть построена такая кусочно-постоянная функция $\bar{f}$, что во всем основном промежутке $[0, 2\pi]$ будет

$$|f(x) - \bar{f}(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}. \quad (8)$$

Действительно, по следствию из теоремы Кантора [n° **75**], промежуток $[\alpha, \beta]$ можно разложить на конечное число частей $[\alpha_i, \beta_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, чтобы в каждой из них колебание функции было меньше $\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}$. Положим теперь функцию $\bar{f}$ равной $f(\alpha_i)$ в каждом промежутке $[\alpha_i, \beta_i)$ для $i < n$ и $f(\alpha_n)$ в промежутке $[\alpha_n, \beta_n]$, а вне промежутка $[\alpha, \beta)$ пусть $\bar{f} = 0$. Очевидно, функция $\bar{f}$ и будет искомой.

Если взять $\bar{\bar{f}} = f - \bar{f}$, то в силу (8),

$$|\bar{\bar{f}}| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi}}, \quad \text{так что} \quad \int_0^{2\pi} [\bar{\bar{f}}(x)]^2\, dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Но первый интеграл в неравенстве (7) справа при $n \to \infty$, ввиду 3°, стремится к 0 и для достаточно больших значений n тоже станет меньше $\frac{\varepsilon}{4}$. Для тех же значений

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

В частности, отсюда вытекает, что *тригонометрическая система функций* (5) *в промежутке* $[0, 2\pi]$ *замкнута.*

415. Полнота тригонометрической системы. Доказанная общая теорема имеет ряд следствий, также представляющих интерес.

С ее помощью может быть доказана

Теорема. *Кроме функции, тождественно равной нулю, не существует непрерывной функции, которая в промежутке* $[0, 2\pi]$ *) *была бы ортогональна* [n° **398**] *ко всем функциям тригонометрической системы* (5)

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \cos mx, \ \sin mx, \ \ldots$$

Иными словами, *если непрерывная в промежутке* $[0, 2\pi]$ *функция* $f(x)$ *имеет коэффициенты Фурье, все равные нулю, то и сама функция сводится тождественно к нулю.*

Действительно, согласно уравнению замкнутости, для такой функции будет

$$\int_0^{2\pi} [f(x)]^2 \, dx = 0.$$

Так как подинтегральная функция здесь неотрицательна, то и подавно

$$\int_0^{X} [f(x)]^2 \, dx = 0$$

для всех X в $[0, 2\pi]$. Дифференцируя по верхнему пределу, с учетом непрерывности подинтегральной функции, получим [n° **183**], что тождественно

$$f(x) \equiv 0.$$

Свойство тригонометрической системы, высказанное в теореме, и называют ее *полнотой:* говорят, что *тригонометрическая система полна — в классе непрерывных функций.*

---

*) Или в каком-нибудь другом промежутке длины 2π.

Далее, *если две непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то они необходимо тождественны*, ибо их разность $f_2(x)-f_1(x)$ будет иметь коэффициенты Фурье, сплошь равные нулю. Таким образом, *непрерывная функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.* Это — лишь другая формулировка свойства полноты тригонометрической системы.

Замечание. Все сказанное сохраняет силу и для любой замкнутой в некотором промежутке $[a, b]$ ортогональной системы функций $\{\varphi_m(x)\}$: из уравнения замкнутости получается полнота, и т. д.

416. Обобщенное уравнение замкнутости. Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные или кусочно-непрерывные в промежутке $[0, 2\pi]$; таковы же будут и функции $f+g$ и $f-g$. Если обозначить соответственно через a_m, b_m и α_m, β_m коэффициенты Фурье функций f и g, то для функций $f \pm g$, очевидно, коэффициентами Фурье будут $a_m \pm \alpha_m$, $b_m \pm \beta_m$.

Применив уравнение замкнутости порознь к функциям $f+g$ и $f-g$, получим

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m+\alpha_m)^2+(b_m+\beta_m)^2]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f+g]^2\,dx$$

и

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m-\alpha_m)^2+(b_m-\beta_m)^2]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f-g]^2\,dx.$$

Если почленно вычесть эти два равенства одно из другого, то, принимая во внимание тождество

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab,$$

придем к *обобщенному уравнению замкнутости*

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,g(x)\,dx. \tag{9}$$

Уравнение (4а) получается отсюда при $g \equiv f$.

Замечание. И в общем случае произвольной ортогональной в промежутке $[a, b]$ системы функций $\{\varphi_m(x)\}$, если уравнение замкнутости (4) выполняется для каждой непрерывной (или кусочно-непрерывной) функции, то для двух таких функций имеет также место обобщенное уравнение замкнутости

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m c_m \gamma_m=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

если c_m и γ_m суть обобщенные коэффициенты Фурье функций f и g. Доказывается это в точности так же, как и только что.

417. Почленное интегрирование ряда Фурье. Предположим функцию $f(x)$, как обычно, кусочно-непрерывной в промежутке $[0,\ 2\pi]$, и пусть

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos mx+b_m\sin mx \tag{10}$$

будет ее ряд Фурье.

Вместе с нею рассмотрим (тоже кусочно-непрерывную) функцию $g(x)$, которая определяется так:

$$g(x)=\begin{cases}1, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant x_0,\\ 0 \text{ в прочих точках.}\end{cases}$$

Ее коэффициенты Фурье равны

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0} dx,\qquad \alpha_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\cos mx\,dx,$$

$$\beta_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\sin mx\,dx\quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Если к этим функциям применить обобщенное уравнение замкнутости (9), то получим:

$$\int_0^{x_0}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{x_0}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\,dx=\int_0^{x_0}f(x)\,dx. \tag{11}$$

Таким образом, *интеграл от функции $f(x)$ получается почленным интегрированием соответствующего ей ряда Фурье.* Тот факт, что почленное интегрирование ряда Фурье оказывается *всегда допустимым,* тем более замечателен, что мы установили его, даже не делая предположения о сходимости самого ряда (10) к функции $f(x)$!*)

Можно сказать даже больше. Подставив в формулу (9), вместо коэффициентов Фурье α_m, β_m функции g, их известные выражения

$$\alpha_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\cos mx\,dx,\qquad \beta_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\sin mx\,dx,$$
$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\qquad\qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

*) Первую попытку доказать допустимость почленного интегрирования ряда Фурье находим у Лобачевского (1834 г.).

приведем ее к эквивалентной форме:

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} g(x)\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)\, g(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\,dx.$$

Это равенство может быть истолковано так: *ряд Фурье* (10) *функции* $f(x)$ *можно почленно интегрировать даже после умножения его членов на функцию* $g(x)$ — в качестве суммы получится как раз интеграл от произведения функций f и g. Здесь речь идет об интегрировании в промежутке $[0, 2\pi]$. Если мы заинтересованы в любом другом промежутке $[0, x_0]$ $(0 < x_0 < 2\pi)$, то нужно лишь положить $g(x) = 0$ вне этого промежутка.

418. Геометрическая интерпретация. Мы хотим познакомить читателя с совершенно новой точкой зрения на то, что мы изучали в этом параграфе. Ограничимся рассмотрением непрерывных функций $f(x)$ в некотором конечном промежутке $[a, b]$ и положим в основу произвольную замкнутую [n°**413**] ортогональную систему (непрерывных же) функций $\{\varphi_m(x)\}$; для упрощения мы даже предположим эту систему нормальной, так что

$$\int_a^b [\varphi_m(x)]^2\,dx = 1 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Например, читатель может себе представить, что речь идет о нормированной тригонометрической системе

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots, \quad \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots$$

в промежутке $[0, 2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$ [см. n° **398**, (17*)].

Мы станем рассматривать все функции $f(x)$ как *элементы* $\vec{f}$ *некоторого «векторного пространства»*, определяя сложение двух таких элементов и умножение элемента на скаляр c естественным образом:

$$\vec{f} + \vec{g} = f(x) + g(x), \qquad c\vec{f} = cf(x).$$

Под *длиной* «вектора» $\vec{f} = f(x)$, чаще называемой его *нормой*, мы будем разуметь неотрицательное число

$$\|\vec{f}\| = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}. \tag{13}$$

Эта длина равна 0, очевидно, только для функции $f(x)$ тождественно равной 0; соответствующий «вектор» есть «*нулевой вектор*» нашего пространства.

Для того чтобы оправдать название «длина», нужно удостовериться в выполнении так называемой «аксиомы треугольника» [ср. n° **125**, (2)]

$$\|\vec{f}+\vec{g}\| \leqslant \|\vec{f}\| + \|\vec{g}\|,$$

т. е. неравенства

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b [g(x)]^2\,dx}.$$

Если возвести обе его части в квадрат, то оно приведется к неравенству

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b [g(x)]^2\,dx} \qquad (14)$$

или

$$\left\{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2\,dx.$$

Это — известное *неравенство Буняковского* *), которое служит интегральным аналогом уже встречавшегося нам алгебраического неравенства Коши:

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

---

*) Академик Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889) — русский математик. Упомянутое в тексте неравенство было опубликовано им в 1859 г. Часто ошибочно связывают это неравенство с именем Шварца, в работах которого оно встречается лишь с 1884 г.

[см. n° **125** и сноску на стр. 222 первого тома]. Доказательство неравенства Буняковского можно осуществить так же, как и неравенства Коши: квадратный трехчлен относительно переменной z

$$\int_a^b [z\cdot f(x)+g(x)]^2\,dx=$$

$$=z^2\cdot\int_a^b [f(x)]^2\,dx+2z\int_a^b f(x)\,g(x)dx+\int_a^b [g(x)]^2\,dx$$

не принимает отрицательных значений, следовательно,

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx\cdot\int_a^b [g(x)]^2\,dx-\left\{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right\}^2\geqslant 0,$$

и т. д.

Удобно ввести понятие «угла» θ между «векторами» $\vec{f}$ и $\vec{g}$: $\theta=\sphericalangle(\vec{f},\ \vec{g})$, определяя его из равенства

$$\cos\theta=\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b [g(x)]^2\,dx}};\tag{15}$$

неравенство (14) показывает, что абсолютная величина выражения справа не превосходит единицы. «Ортогональность» функций $f(x)$ и $g(x)$ [n° **398**]:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=0$$

равносильна тому, что $\cos\theta=0$, так что угол θ оказывается прямым.

Учитывая определение нормы [см. (13)], из (15) получаем

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\|\vec{f}\|\cdot\|\vec{g}\|\cdot\cos\theta;$$

это дает основание рассматривать интеграл слева как *скалярное произведение* «векторов» $\vec{f}$ и $\vec{g}$:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=\vec{f}\cdot\vec{g}.$$

Если вектор $\vec{g}$ есть «единичный вектор» или «орт», т. е. если его норма $\|\vec{g}\| = 1$, то скалярное произведение

$$\vec{f} \cdot \vec{g} = \|\vec{f}\| \cdot \cos\theta$$

можно рассматривать как *проекцию «вектора»* $\vec{f}$ *на этот «орт»*:

$$\underset{\vec{g}}{\text{пр.}}\ \vec{f}.$$

Если дана последовательность «векторов» $\{\vec{f_n}\}$, то *пределом* ее называется такой «вектор» $\vec{f}$, для которого

$$\|\vec{f_n} - \vec{f}\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Возвращаясь к соответствующим функциям $\{f_n(x)\}$, $f(x)$, имеем, по определению нормы [см. (13)],

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx \to 0,$$

так что *сходимость последовательности «векторов»* $\{\vec{f_n}\}$ *к предельному «вектору»* f *означает не что иное как сходимость в среднем* [n° **413**] *последовательности функций* $\{f_n(x)\}$ *к предельной функции* $f(x)$.

Вернемся теперь к положенной в основу ортогональной и нормальной [см. (12)] системе функций $\{\varphi_m(x)\}$. Ее можно трактовать как систему взаимно ортогональных «ортов» $\{\vec{\varphi_m}\}$. Ввиду предположенной замкнутости упомянутой системы функций, она будет также и полной [n° **415**, замечание], а это значит, что *к основной системе «ортов»* $\{\vec{\varphi_m}\}$ *нельзя больше присоединить никакого нового «орта», который был бы ортогонален ко всем* $\vec{\varphi_m}$!

Рассмотрим проекцию произвольного «вектора» $\vec{f}$ на какой-нибудь из основных «ортов» $\vec{\varphi_m}$:

$$c_m = \underset{\vec{\varphi_m}}{\text{пр.}}\ \vec{f} = \vec{f} \cdot \vec{\varphi_m} = \int_a^b f(x)\, \varphi_m(x)\, dx.$$

Мы узнаем в этом выражении попросту один из (обобщенных) коэффициентов Фурье [n° **398**] функции $f(x)$ *). Поскольку функ-

---

*) Напоминаем о том, что функции $\{\varphi_m(x)\}$ нормированы, так что все числа $\lambda_m = 1$ [см. (12)].

ция $f(x)$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье [n° 415, замечание], то *«вектор»* $\vec{f}$ *однозначно определяется его проекциями на «орты» основной системы* $\{\vec{\varphi}_m\}$.

Произведение $c_m \cdot \varphi_m(x)$, т. е. вектор $c_m \vec{\varphi}_m = \vec{f}_m$, естественно назвать *составляющей «вектора»* $\vec{f}$ *по направлению «орта»* $\vec{\varphi}_m$.

Как же теперь может быть истолкован обобщенный ряд Фурье функции $f(x)$ [n° 398]:

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x) + \ldots ? \tag{16}$$

Отметим, прежде всего, что — ввиду предположенной замкнутости системы $\{\varphi_m(x)\}$, частичная сумма $s_n(x)$ ряда (16) при $n \to \infty$ сходится в среднем к функции $f(x)$ [n° 413], а это значит, что *всегда имеет место разложимость в ряд Фурье, если сходимость понимать именно в среднем.* Иными словами, «вектор» $\vec{s}_n$ стремится к предельному «вектору» $\vec{f}$, что можно записать в форме разложения

$$\vec{f} = c_0\vec{\varphi}_0 + c_1\vec{\varphi}_1 + \ldots + c_m\vec{\varphi}_m + \ldots = \vec{f}_0 + \vec{f}_1 + \ldots + \vec{f}_m + \ldots$$

— *каждый вектор* $\vec{f}$ *представляется в виде суммы всех его составляющих по направлениям основных «ортов».* Таков геометрический смысл разложения в ряд Фурье!

Уравнение замкнутости [n° 413], ввиду (12), напишется так

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2$$

или

$$\|\vec{f}\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \|\vec{f}_m\|^2.$$

Квадрат длины «вектора» оказывается равным сумме квадратов длин всех его составляющих. Это — естественное обобщение теоремы Пифагора (отвечающей случаю двумерного вектора, разложенного на две взаимно перпендикулярные составляющие).

Вспомним и обобщенное уравнение замкнутости [n° 416, замечание]

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\gamma_m,$$

где c_m — коэффициенты Фурье функции f, а γ_m — коэффициенты Фурье функции g. Если переписать его так:

$$\vec{f}\cdot\vec{g}=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\bar{\gamma}_m,$$

то здесь можно усмотреть аналогию с привычным выражением скалярного произведения двух векторов в трехмерном пространстве через их проекции на три взаимно перпендикулярные оси [n° **388**, (1)].

Для углубления аналогии между рассматриваемым «пространством» функций и обычным эвклидовым пространством понадобилось бы, во-первых, расширить класс рассматриваемых функций и, во-вторых, обобщить используемое определение интеграла. И то, и другое впоследствии будет сделано в курсе так называемой теории функций вещественной переменной [см. заключение, раздел VI].

Замечание. Параллельно с векторной интерпретацией множества $\{f\}$ всех непрерывных функций, можно было бы рассматривать его точечную интерпретацию, считая отдельные непрерывные функции $f=f(x)$ как бы «точками» составленного из них «пространства». В этом случае целесообразно ввести понятие *расстояния* $\rho(f,\ g)$ между двумя «точками» $f=f(x)$ и $g=g(x)$ следующим образом:

$$\rho(f,\ g)=\|\vec{f}-\vec{g}\|=\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx}\,.$$

То, что выше было названо *длиной* «вектора» $\vec{f}$, есть не что иное как *расстояние* «точки» f от начальной «точки» 0.

Если f, g, h суть три «точки» нашего «пространства», то имеет место «аксиома треугольника» в форме

$$\rho(f,\ h)\leqslant\rho(f,\ g)+\rho(g,\ h).$$

Эта форма получается из прежней, если заменить там $\vec{f}$ на $\vec{f}-\vec{g}$, а $\vec{g}$ — на $\vec{g}-\vec{h}$.

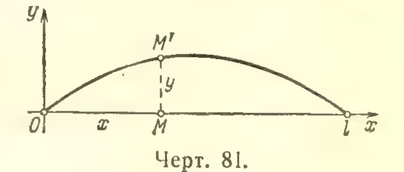
§ 5. ОЧЕРК ИСТОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

419. Задача о колебании струны. Эта знаменитая задача, привлекшая к себе внимание ряда выдающихся математиков XVIII века, сыграла важную роль в самой постановке *вопроса о возможности тригонометрического разложения произвольной функции.* Поэтому мы сначала познакомим читателя с упомянутой задачей и ее решением.

Пусть однородная струна, длины l, закреплена концами в точках $x=0$ и $x=l$ оси x и под действием некоторого натяжения располагается в равновесии вдоль этой оси (черт. 81). Представим себе, что в момент $t=0$ струна выводится из положения равновесия в плоскости xy (которую, напри-

мер, будем предполагать вертикальной) и предоставляется сама себе*). Тогда точки струны начнут колебаться в вертикальной же плоскости. Если допустить, что каждая точка M струны с абсциссой x колеблется строго вертикально, то ее положение в момент времени $t \geqslant 0$ определится ее ординатой y, которая представит ее отклонение от положения равновесия. Эта ордината будет функцией от обеих переменных x и t:

$$y = y(x, t), \tag{1}$$



Черт. 81.

которая и подлежит определению.

При некоторых — упрощающих вопрос — предположениях явление описывается следующим *дифференциальным уравнением в частных производных*:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где a — постоянная, зависящая от физических свойств струны.

Кроме этого уравнения, искомая функция $y(x, t)$ должна удовлетворять еще ряду требований. Прежде всего, должны выполняться так называемые *предельные условия*:

$$y(0, t) = 0, \qquad y(l, t) = 0 \qquad (t \geqslant 0), \tag{3}$$

выражающие факт закрепления концов струны. Затем, *если в начальный момент $t = 0$ отклонения точек струны характеризуются функцией $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, а скорости равны нулю* *), то надлежит потребовать выполнения *начальных условий*

$$y(x, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{4}$$

Таким образом, окончательно, *задача сводится к разысканию такой функции $y(x, t)$, которая для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t \geqslant 0$ удовлетворяла бы уравнению (2) и условиям (3) и (4).*

Замечание. Поскольку функция $y(x, t)$, *обращающаяся при $t = 0$ в $f(x)$*, должна удовлетворять уравнению (2) и условиям (3), *в частности, и в начальный момент времени*, то самое функцию $f(x)$ необходимо при этом предположить *дважды дифференцируемой* в промежутке $[0, l]$ и, кроме того, подчинить еще условиям

$$f(0) = 0, \qquad f(l) = 0, \tag{5a}$$

а также

$$f''(0) = 0, \qquad f''(l) = 0. \tag{5б}$$

420. Решение Даламбера и Эйлера. Этими учеными и было впервые явно сформулировано уравнение (2). Его общее решение оба они — сначала Даламбер (1747 г.), а затем Эйлер (1748 г.) — представили в такой форме

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at). \tag{6}$$

---

*) Мы для определенности ограничимся предположением, что колебания струны начинаются из состояния покоя. Именно это предположение лежит в основе решения задачи, данного Эйлером (см. следующий номер).

Здесь $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ означают «произвольные» функции, заданные для всех значений аргументов. Для нашей цели достаточно непосредственно проверить, что выражение (6) при всех значениях x и t удовлетворяет условию (2), каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции φ и ψ.

Теперь возникает вопрос о выборе этих функций так, чтобы удовлетворены были также предельные и начальные условия, т. е. чтобы было [см. (3)]

$$\varphi(at)+\psi(-at)=0, \quad \varphi(l+at)+\psi(l-at)=0 \quad (t\geqslant 0) \tag{3a}$$

и [см. (4)]

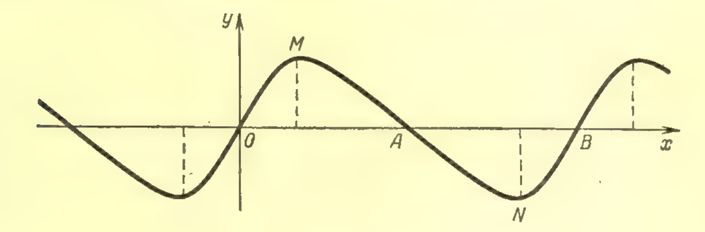
$$\varphi(x)+\psi(x)=f(x), \quad \varphi'(x)-\psi'(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{4a}$$

При этом, очевидно, функцию $\varphi(u)$ достаточно определить для $u\geqslant 0$, а функцию $\psi(v)$ — для $v\leqslant l$.

Прежде всего, интегрируя второе из равенств (4а), найдем

$$\varphi(x)=\psi(x)\,^{*)} \qquad (0\leqslant x\leqslant l).$$

Тогда, в силу первого из этих равенств, обе функции равны $\frac{1}{2}f(x)$: таким образом, в промежутке $[0, l]$ они уже определены (график их на черт. 82



Черт. 82.

изображен кривой OMA). Так как функция φ подлежит еще определению только в промежутке $(l, +\infty)$, а функция ψ — в неналегающем на него промежутке $(-\infty, 0)$, то для упрощения записи можно функциональную характеристику ψ заменить на φ и определить функцию $\varphi(x)$ в этих промежутках, исходя из условий [см. (3а)]

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=0, \tag{7}$$

$$(x\geqslant 0)$$

$$\varphi(l+x)+\varphi(l-x)=0. \tag{8}$$

Прежде всего, изменяя в (8) x от 0 до l, мы определим φ в промежутке $(l, 2l]$:

$$\varphi(l+x)=-\varphi(l-x)=-\frac{1}{2}f(l-x)$$

---

*) Без умаления общности можно не вводить постоянной интегрирования C, ибо, отняв $\frac{1}{2}C$ от φ и прибавив $\frac{1}{2}C$ к ψ, всегда можно осуществить именно указанное равенство.

(кривая ANB на черт. 82). Теперь, когда функция φ полностью определена в промежутке $[0, 2l]$, причем — в силу (5а) — вдобавок

$$\varphi(0) = \varphi(2l) = 0,$$

мы докажем, что она вообще имеет период $2l$, и тем самым определим ее уже во всем промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Пусть сначала $\xi \geqslant -l$; положив в (8) $x = \xi + l$, получим [с учетом (7)]

$$\varphi(\xi + 2l) = -\varphi(-\xi) = \varphi(\xi).$$

Аналогично, при $\xi < -l$ возьмем в (8) $x = -(\xi + l)$ и [снова опираясь на (7)] придем к тому же. В общем, в качестве графика функции φ мы получим (по выражению Эйлера) «змеевидную кривую», изображенную на черт. 82. Она симметрична относительно начала, как и должно быть, ибо в силу (7) функция $\varphi(x)$ — нечетная.

Так как функция $f(x)$ имеет в промежутке $[0, l]$ две производные и, к тому же, удовлетворяет условиям (5а) и (5б), то — как можно показать — определенная указанным образом функция $\varphi(x)$ будет повсюду дважды дифференцируема, не исключая точек вида kl $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где «склеиваются» отдельные куски кривой. Через эту функцию искомое решение окончательно и представится в виде

$$y = \varphi(x + at) + \varphi(x - at). \tag{9}$$

421. Решение Тейлора и Д. Бернулли *). Еще в 1713 г. Тейлор изучал вопрос о движении натянутой струны и определял период ее колебания. Отправной точкой для него служило некое предложение, равносильное по существу уравнению (2). В результате он пришел к выводу, что, *если струна колеблется как целое,* то она в каждый момент имеет форму арки синусоиды.

Разумеется, это — лишь один из возможных для струны видов колебания. Из рассуждений Тейлора вытекает существование бесчисленного множества таких видов: стоит лишь, разделив струну на n $(\geqslant 2)$ равных участков, к каждому в отдельности применить прежний вывод. В таком случае форма струны представит собой n последовательных синусоидальных арок.

Мы получим все эти частные решения уравнения (2) чисто аналитическим путем, исходя непосредственно из уравнения. Станем искать его решение (отличное от очевидного, но не интересного нам решения — нуля) под видом произведения двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая — только от t:

$$y = X(x) \cdot T(t).$$

Уравнение (2) в этом случае принимает вид

$$XT'' = a^2 X'' T$$

(где штрихи означают производные по той переменной, от которой функция зависит) или, наконец,

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X}. \tag{10}$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от x, а правая — от t, то их общее значение фактически не зависит ни от x, ни от t, т. е. сводится

---

*) Даниил Бернулли (1700—1782), сын Иоганна Бернулли и друг Эйлера. В период с 1725 по 1733 г. деятельно работал в Петербургской академии наук.

к постоянной, которую мы возьмем в форме $-a^2\lambda^2$ (при $\lambda > 0$). Тогда уравнение (10) распадается на два:

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0, \qquad X'' + \lambda^2 X = 0;$$

общие решения этих — уже обыкновенных — дифференциальных уравнений, соответственно, имеют вид:

$$T = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t,$$
$$X = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x.$$

Для того чтобы функция $y = XT$ удовлетворяла и предельным условиям (3), им должна удовлетворять функция X. Полагая в ней $x = 0$, сразу видим, что $C = 0$; полагая же $x = l$ и учитывая, что D уже не может быть нулем, придем к условию

$$\sin\lambda l = 0,$$

откуда $\lambda l = n\pi$ при натуральном n. Таким образом, λ может иметь лишь одно из следующих значений:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \qquad \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \qquad \ldots, \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \qquad \ldots\;^{*)}$$

Если считать что **начальные скорости** всех точек струны равны нулю, то $T'(0)$, а отсюда $B = 0$. Обозначая при $\lambda = \lambda_n$ постоянную AD через b_n, мы и придем к упомянутой последовательности **частных решений** уравнения (2):

$$y_n = b_n\cos\frac{n\pi a}{l}t \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Если струна осуществляет колебание по такому закону, то *все ее точки колеблются с одним и тем же периодом*

$$T_n = \frac{2l}{na},$$

которому отвечает тон определенной высоты. Амплитуда же колебаний каждой точки зависит от ее положения и равна

$$\left| b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \right|.$$

Черт. 83.

Вся струна разбивается на n равных участков, причем точки одного участка находятся все в одинаковых фазах, а точки соседних участков — в противоположных фазах. Последовательные положения струны, для случаев $n = 1, 2, 3, 4$, изображены на черт. 83. Точки, отделяющие один участок от другого, оказываются в покое; это — так называемые «узлы». Середины участков — «пучности» — колеблются с наибольшей амплитудой.

После появления общих исследований Даламбера и Эйлера о колебании струны с работой на ту же тему выступил Д. Бернулли (1753 г.). Напомнив о том, что **множественность** видов колебания струны была небезы-

---

*) Если бы мы взяли постоянное значение отношений (10) в форме $a^2\lambda^2$, то предельным условиям могла бы удовлетворять только функция X, тождественно равная нулю.

звестна еще Тейлору, Бернулли — основываясь на физических наблюдениях — выдвинул утверждение, что *все эти колебания осуществляются сразу, и струна одновременно издает тоны различной высоты.* Происходит, по его выражению, «смешение» (мы сказали бы — наложение) отдельных колебаний, так что полное колебание струны может быть охарактеризовано равенством

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi a}{l} t \sin\frac{n\pi}{l} x. \qquad (11)$$

Основной тон определяется первой составляющей, y_1; ей отвечает период $T_1=\frac{2l}{a}$. Остальные тоны, издаваемые струной, или обертоны, характеризуются другими составляющими; им отвечают периоды $T_2=\frac{1}{2}T_1$, $T_3=\frac{1}{3}T_1, \ldots$ Если прикоснуться пальцем к середине струны, то сразу заглохнут как основной тон, так и нечетные обертоны, для которых там была пучность. Четные обертоны, для которых на середину струны приходится узел, все сохранятся; для них роль основного будет играть второй обертон, и струна станет издавать октаву первоначального тона. Именно богатство физического содержания, при полном согласии с экспериментом, заставило Бернулли предпочесть решение (11) эйлерову решению (9). Нужно сказать, что Эйлер и сам упоминает о решении (11), но лишь как о возможном частном решении. Для Бернулли в ту пору — по собственному признанию — вопрос об общности его решения был еще недостаточно ясен, но он отказывается понять, какой (физический) смысл могли бы иметь другие решения, если бы они существовали.

Мы докажем сейчас, опираясь на развитую выше теорию, что — *при надлежащем выборе коэффициентов в формуле* (11)*) — *она просто тождественна с формулой* (9). При этом мы предполагаем, конечно, выполненными те условия относительно функции $f(x)$, которые раньше были на нее наложены [n° **419**, замечание].

Начнем именно с выбора коэффициентов b_n. Если мы хотим, чтобы формула (11) давала решение, удовлетворяющее начальному условию (4):

$$y(x, 0)=f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

то, полагая в (11) $t=0$, должны иметь

$$\sum_{1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l} x=f(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \qquad (12)$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема и на концах промежутка $[0, l]$ обращается в нуль, то такое разложение, действительно, имеет место во всем промежутке, если взять [см. n° **405**, (22)]

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

что мы и будем предполагать.

---

*) Вопроса о коэффициентах Бернулли не затрагивает.

Но ряд (12) сходится при всех значениях x, и с его помощью во всем промежутке от $-\infty$ до $+\infty$ может быть определена функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Таким образом, в промежутке $[0, l]$ эта функция равна $\frac{1}{2}f(x)$; кроме того, как легко непосредственно проверить, для нее выполняются условия (7) и (8). Отсюда уже вытекает, что она в точности совпадает с той функцией φ, о которой была речь в предыдущем номере, поскольку все упомянутые условия, вместе взятые, определяли ее однозначно.

В таком случае уже известное нам эйлерово решение (9) теперь может быть представлено в виде

$$y=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left[\sin\frac{n\pi(x+at)}{l}+\sin\frac{n\pi(x-at)}{l}\right]=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

так что разложение (11) при указанном выборе коэффициентов действительно дает решение уравнения (2), и притом — тождественное с прежним.

422. Спор по поводу задачи о колебании струны. Этот спор разгорелся по двум направлениям.

Прежде всего, несмотря на формальное сходство решений, предложенных Даламбером и Эйлером, вскоре выяснилось, что между обоими учеными существует глубокое расхождение по вопросу о том, *какие функции допустимо рассматривать в анализе,* и — в частности — какой должна быть функция f, характеризующая начальную форму струны.

Эйлер не требовал, чтобы эта функция определялась во всем промежутке $[0, l]$ единым аналитическим выражением (подобную функцию Эйлер называл «непрерывной»). Эта функция могла быть и «смешанной», т. е. задаваться в разных частях промежутка различными выражениями. Эйлер считал возможным даже определять начальное положение струны просто «кривой, начертанной свободным движением руки»: ведь и в этом случае было осуществимо указанное им построение графика функции φ (черт. 82), а по нему уже легко было геометрически установить вид струны в любой момент времени.

Иной была позиция Даламбера: не только исходная функция $f(x)$, но и определяемая по ней уже в бесконечном промежутке функция $\varphi(x)$ должна — по его убеждению — подчиняться единому аналитическому закону; решение задачи средствами анализа возможно лишь в том случае, когда «различные положения колеблющейся струны могут быть заключены в одном и том же уравнении». Впоследствии Даламбер сосредоточил свои возражения на вопросе о кривизне, которая должна быть определенной во всех точках, поскольку в самом уравнении фигурирует вторая производная $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; между тем произвольность задания f и «склеивание» графика φ из кусков ее существования не обеспечивают.

Если добиваться выполнения уравнения (2), то последнему соображению нельзя отказать в убедительности [ср. те ограничения, которые мы выше наложили на функцию f (n° **419**, замечание)].

Вопрос о характере «произвольных функций», впервые встретившихся при решении дифференциальных уравнений в частных производных*), еще долго дебатировался среди математиков. В 1787 г. — уже после

*) Наподобие произвольных постоянных, уже встречавшихся при решении обыкновенных дифференциальных уравнений.

смерти обоих противников — Петербургская академия выдвинула именно этот спорный вопрос на соискание премии, которая в 1790 г. была присуждена Луи Арбога, близкому по своим взглядам к Эйлеру.

Перейдем теперь ко второму предмету спора, имеющему уже непосредственную связь с основным содержанием настоящего очерка. На этот раз в одном лагере оказались Эйлер и Даламбер, которые оба выступили против Бернулли, утверждая, что его решение не является общим, так как далеко не исчерпывает всех возможных законов колебания струны.

Эйлер ясно понимал, что все сводится к вопросу: *может ли любая функция* $f(x)$ (характеризующая начальную форму струны) *быть разложена в ряд по синусам кратных дуг?* Сам он отвечал на этот вопрос отрицательно. Прежде всего, начальная кривая, по которой располагалась струна, могла бы оказаться вовсе не выразимой никаким уравнением, значит, в частности — и уравнением (12) Бернулли. Но даже если она и представлялась аналитическим выражением, то это последнее могло не обладать теми особенностями, которые отличают каждую кривую, выражаемую уравнением вида (12). К таким особенностям принадлежит, во-первых, нечетность ординаты, как функции от абсциссы, и, во-вторых, наличие у этой функции периода $2l$.

Возражение Эйлера требует пояснений: ведь функция $f(x)$ задается лишь в промежутке от 0 до l, где эти особенности вообще и не могли бы проявиться! Но в ту пору еще считалось само собою разумеющимся, что *два аналитических выражения, получающих равные значения при изменении переменной в каком-либо промежутке, тем самым отождествляются и повсюду вне него.* Поэтому, например, если функция $f(x)$ в промежутке $(0, l)$ была задана с помощью алгебраического выражения, которое никогда не обладает вторым из упомянутых свойств, то — в силу сказанного — даже в пределах одного этого промежутка она уже не могла совпадать с выражением вида (12).

Даламбер в своих возражениях пошел еще дальше: по его мнению, даже если отдельные части эйлеровой кривой оказываются все связанными единым аналитическим выражением, то она все же не обязана следовать закону, указанному Бернулли. Так Даламбер отверг решение, которое как раз и осуществляло его собственное требование, чтобы различные положения колеблющейся струны были «заключены в одном и том же уравнении»!

Со своей стороны, Бернулли теперь уже с бо́льшей настойчивостью утверждал, что уравнением вида (12) охватываются всевозможные кривые: располагая бесконечным множеством коэффициентов, можно ведь заставить выражаемую им кривую пройти через любое число наперед заданных точек. При этом особую ценность в его глазах все же, попрежнему, представляла физическая сторона дела, а именно «возможность привести существующие в природе движения, которые кажутся неподчиненными никакому закону, к простым изохронным движениям...».

423. Разложение функций в тригонометрические ряды, определение коэффициентов. Самым удивительным во всей этой дискуссии было то, что Эйлер в это время уже сам располагал примерами разложения именно алгебраических функций в тригонометрические ряды (конечно, полученными совершенно формально).

В «Дифференциальном Исчислении» (1755 г.) мы находим разложение

$$\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\ldots=\frac{\pi-x}{2} \tag{13}$$

[ср. n° **406**, 1)], о котором Эйлер еще в 1744 г. сообщал в письме своему другу Гольдбаху. В 1760 г. вышла в свет работа Эйлера, написанная в 1754 г., где, исходя из разложения

$$\frac{\cos x-a}{1+a^2-2a\cos x}=\cos x+a\cos 2x+a^2\cos 3x+a^3\cos 4x+\ldots$$

и, полагая $a = \pm 1$, он сначала приходит к р а с х о д я щ и м с я рядам

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \ldots = -\frac{1}{2},$$
$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \ldots = \frac{1}{2}, \tag{14}$$

а затем интегрирует почленно в т о р о й из них и получает результат:

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots = \frac{x}{2} \tag{15}$$

[ср. n° **406**, 2)]. «Нет надобности присоединять постоянную, поясняет Эйлер, ибо при $x = 0$ сама сумма исчезает». Никаких указаний на область применимости этих и подобных им разложений у Эйлера нет.

Интересно, что Эйлер н е получает разложения (13) путем почленного интегрирования п е р в о г о из рядов (14). Это лишь впоследствии (1772 г.) выполнил Д. Бернулли. Он подчеркивает прежде всего, что определение постоянной интегрирования в равенстве

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots = C - \frac{x}{2}$$

требует «осмотрительности»: например, не годится для этой цели просто подставить $x = 0$; Бернулли полагает $x = \frac{\pi}{2}$ и, используя известный ряд Лейбница [n° **255**, (20)], приходит к равенству

$$C - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4}, \quad \text{откуда } C = \frac{\pi}{2}.$$

Бернулли (впервые!) точно указывает область применимости полученного разложения — промежуток от 0 до 2π, причем для $x = 0$ (2π) равенство места не имеет. Больше того: для других промежутков: от 2π до 4π, от 4π до 6π, и т. д. приходится постоянную интегрирования соответственно изменять (хотя это и «кажется противоречащим закону непрерывности»).

Важный вопрос об *определении коэффициентов тригонометрического разложения н а п е р е д з а д а н н о й функции* — в общем виде — по-видимому, впервые поставил Клеро в 1757 г. в одной работе по теоретической астрономии. Речь в ней идет о разложении функции в промежутке от 0 до π в ряд по косинусам. Сначала автор решает интерполяционную задачу, ограничиваясь конечным числом n членов ряда и добиваясь совпадения их суммы со значением функции в таком же числе равноотстоящих точек; коэффициенты получаются в виде некоторых сумм. Затем лишь он «берет n бесконечным», т. е., по существу, переходит к пределу, и устанавливает «точные» значения коэффициентов в виде знакомых нам интегральных выражений [n° **405**, (16)] *).

Такие же формулы в 1777 г. получил сам Эйлер, на этот раз — *именно тем методом, который нам теперь привычен, т. е., с помощью почленного интегрирования.* (Работа Эйлера была опубликована со значительным опозданием — лишь в 1798 г.) Свой результат Эйлер формулирует в виде «общей теоремы», в условие которой входит п р е д п о л о ж е н и е, что функция допускает разложение в ряд по косинусам. *О том, что п р о и з в о л ь н а я функция его допускает, и здесь речи нет.*

---

*) Интерполяционную задачу — в связи с вопросом о форме колеблющейся струны — несколькими годами позже решал и Лагранж.

Перелом в самом отношении к этому вопросу был создан уже в начале прошлого века исследованиями Фурье, посвященными математической теории распространения тепла. Эти исследования, которые докладывались Парижской академии в виде отдельных сообщений и мемуаров, начиная с 1807 г., были в значительной части подытожены в сочинении «Аналитическая теория тепла» (1822 г.), быстро получившем известность.

Фурье, подобно Эйлеру, также устанавливает интегральные формулы для коэффициентов тригонометрического разложения функции с помощью почленного интегрирования. В легкой возможности вычислять по этим формулам коэффициенты для «совершенно произвольных функций» он почерпнул уверенность в *допустимости самого разложения* для всех таких функций. Сильное впечатление на современников Фурье производили разложения функций, подчиняющихся в разных частях промежутка разным законам, например:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\alpha}{n} \sin nx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{для } 0 < x < \alpha \\ 0 & \text{для } \alpha < x < \pi \end{cases}$$

Фурье разлагал (в промежутке от 0 по π!) четную функцию $\cos x$ по синусам, а нечетную функцию $\sin x$ по косинусам. Всем этим наносился решительный удар по прежним воззрениям: *ведь сглаживалась разница между «смешанными» и «непрерывными» функциями* (по терминологии Эйлера). Вместе с тем *старый спор о тригонометрическом разложении «произвольной» функции с определенностью разрешался в пользу Бернулли!*

В ряде случаев можно было непосредственно проверить сходимость построенных Фурье разложений к соответствующим функциям. С другой стороны, эти разложения находили все более широкое применение в математической физике. Однако, несмотря на все это, идеи Фурье по началу встретили мало сочувствия: почленное интегрирование было в обычае того времени, но оно ведь не доказывает, а предполагает допустимость разложения, и остановка была именно за доказательством этой допустимости!

424. Доказательства сходимости рядов Фурье и другие вопросы. Правда, сам Фурье в конце своего сочинения делает попытку доказать справедливость тригонометрического разложения функции, но его рассуждения были далеки от аналитической строгости, хотя основная его идея, которой он придал геометрическую форму, и была правильной. Затем последовали попытки других авторов, в том числе Коши, но и они вызвали возражения.

Первое действительно строгое доказательство утверждения, высказанного Фурье, принадлежит Дирихле (1829 г.), оно по существу использует идею самого Фурье. Хоть в заголовке относящейся сюда работы *) еще упоминается о «произвольной функции», но на деле Дирихле точно ограничивает рассматриваемый им класс функций: это функции, определенные и конечные в промежутке $[-\pi, \pi]$, кусочно-непрерывные и кусочно-монотонные **). Если функция $f(x)$ удовлетворяет этим требованиям, то — как доказывает Дирихле — тригонометрический ряд, составленный для нее по формулам Фурье, сходится к сумме

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

---

*) Г. Лежен-Дирихле, «О сходимости тригонометрических рядов, служащих для представления в данных пределах произвольной функции» (*Харьковская математическая библиотека*, серия В, сб. № 2, 1914, стр. 3—23).

**) Это значит, что основной промежуток может быть разложен на конечное число частей, внутри каждой из которых в отдельности функция изменяется монотонно.

при $-\pi < x < \pi$, и к сумме

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

при $x = \pm\pi$.

Через короткое время (в 1834—1835 г.) Лобачевский тоже дал доказательство теоремы разложения, наложив, однако, на функцию условия другого типа, чем Дирихле. Именно Лобачевский предполагает функцию вообще дифференцируемой, за исключением разве лишь конечного числа скачков, а также точек, где сама функция или ее производная обращается с той и с другой стороны в $\pm\infty$; при этом функция должна оставаться интегрируемой — в собственном или в несобственном смысле *). Условия Дирихле и Лобачевского взаимно не перекрываются.

Впоследствии другими авторами был установлен целый ряд более общих достаточных признаков сходимости ряда Фурье к исходной функции.

Важное место в развитии теории тригонометрических рядов занимает известная диссертация Римана **) (1854 г.; опубликована в 1867 г.). Начинается она очерком истории вопроса. Затем автор останавливается на уточнении понятия определенного интеграла и устанавливает условия его существования. Этим была расширена область применимости рядов Фурье (в частности, например, стала ясной ненужность каких-либо предположений о непрерывности функции в теореме Дирихле). Но главное содержание работы связано с рассмотрением тригонометрических рядов общего вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{16}$$

и выяснением необходимых условий представления подобным рядом произвольной функции $f(x)$ с периодом 2π. Ряду (16) Риман сопоставляет ряд

$$\frac{a_0}{4}x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

который из него получается формально почленным двукратным интегрированием. В предположении, что $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$ (а к этому случаю всегда можно свести дело), последний ряд сходится равномерно во всем промежутке от $-\infty$ до $+\infty$ и определяет в нем непрерывную функцию $F(x)$. Свойствам функции $F(x)$ и ее связи с функцией $f(x)$ посвящена последняя часть работы. К диссертации Римана примыкает ряд работ других авторов, использовавших его метод исследования ряда (16) и полученные им результаты.

Прежде всего возник *вопрос об единственности тригонометрического разложения функции:* ведь формулы Эйлера — Фурье, дающие коэффициенты такого разложения, были установлены с помощью почленного интегрирования ряда, а во второй половине прошлого века уже была осознана

*) Н. И. Лобачевский, «Об исчезании тригонометрических строк» и «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк...» (*Полное собрание сочинений*, т. V, 1951, стр. 31—80 и 81—162).

**) Бернгард Риман, «О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда» (Сборник, указанный в сноске на предыдущей странице, стр. 27—85, или *Сочинения*, 1948, стр. 225—261).

недопустимость безоговорочного использования подобного приема. Первым упомянутый вопрос поставил в 1870 г. Гейне *), но полное решение его тогда же дал Кантор, доказавший следующую общую теорему: *если для функции* $f(x)$ *в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *вообще возможно разложение в ряд вида* (16), *то такое разложение единственно.* Единственность сохраняется и при наличии в указанном промежутке исключительных точек, для которых ничего не известно о сумме ряда и даже об его сходимости (лишь если множество таких исключительных точек бесконечно, оно подлежит еще некоторым ограничениям).

Каковы же коэффициенты этого единственного разложения функции $f(x)$ (если допустить его возможность)? *Всегда ли они будут именно коэффициентами Фурье?* Конечно, этот вопрос можно было ставить только по отношению к таким функциям, для которых интегралы, фигурирующие в формулах Эйлера — Фурье, вообще имеют смысл. Весьма замечательно, что *ответ оказался утвердительным,* как это сначала установил в 1872 г. для непрерывных функций Асколи **), а 1874 г. для функций, интегрируемых в собственном смысле, — дю Буа-Реймон ***). Впоследствии этот результат был распространен и на функции, интегрируемые в более общем смысле. *Этими работами было впервые убедительно мотивировано то исключительное внимание, которое уделялось исследователями разложению функций именно в ряды Фурье.*

Остановимся еще лишь на одном вопросе. Дирихле был убежден в том, что каждая непрерывная функция, с периодом 2π, разложима в ряд Фурье, хотя и не мог это доказать. Это убеждение, повидимому, разделяли и другие математики. Однако дю Буа-Реймон, после ряда бесплодных попыток доказать справедливость предположения Дирихле, в 1876 г. примером опроверг его, построив такую непрерывную функцию, для которой ряд Фурье расходится в бесчисленном множестве точек в пределах сколь угодно малого промежутка.

На этом мы заканчиваем наш очерк, так как — хотя элементарная часть теории тригонометрических рядов несомненно относится к основам анализа — в дальнейшем своем развитии эта теория уже оказывается связанной с более тонкими понятиями и утверждениями, которые читателю незнакомы.

425. Заключительные замечания. Мы хотели бы подчеркнуть здесь то исключительное положение, которое в истории анализа занимает теория тригонометрических рядов.

Прежде всего, тесно связано с этой теорией уточнение самого понятия функции. Спор Эйлера и Д. Бернулли по поводу разложения «произвольной» функции в тригонометрический ряд много содействовал устранению некоторых предвзятых и неверных мыслей, получившему завершение в работах Фурье. Современное общее определение функции мы не случайно находим у Лобачевского и Дирихле именно в их исследованиях по тригонометрическим рядам!

В связи с потребностями теории рядов Фурье, было Риманом уточнено и обобщено понятие определенного интеграла. Первые шаги Кантора в созданной им теории бесконечных множеств были сделаны по поводу вопроса об единственности тригонометрического разложения. Современная теория обобщенного суммирования расходящихся рядов ведет начало от исследований Пуассона ****) по суммиро-

---

*) Генрих Эдуард Гейне (1821—1881) — немецкий математик.

**) Джулио Асколи (1843—1896) — итальянский математик.

***) Поль дю Буа-Реймон (1831—1889) — немецкий математик, по происхождению швейцарец.

****) Симон Дени Пуассон (1781 — 1840) — выдающийся французский механик, физик и математик.

ванию тригонометрических рядов. Даже если те или другие тонкие понятия анализа (например, абсолютная и неабсолютная сходимость числового ряда, равномерная и неравномерная сходимость функционального ряда) появлялись и вне связи с теорией тригонометрических рядов, то они немедленно применялись к этим рядам, которые служили как бы оселком для испытания их значимости. Такое положение вещей сохраняется и по сию пору.

Тригонометрические ряды находят себе непосредственное применение в математической физике (некоторое представление об этом читатель может составить на примере рассмотренной выше задачи о колебании струны) и во многих разделах техники. Но еще более широкую область применения имеют так называемые «обобщенные ряды Фурье», т. е. разложения по различным другим системам ортогональных функций, для которых образцом служат тригонометрические разложения и теория которых тесно переплетается с теорией рядов Фурье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ОЧЕРК ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

После освоения о с н о в математического анализа для читателя представит интерес ознакомиться, хотя бы в самых общих чертах, с теми математическими дисциплинами, которые в целом ныне и составляют м а т е м а т и ч е с к и й а н а л и з, понимаемый в широком смысле.

I. ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С этой отраслью анализа читатель уже знаком из университетского курса, что дает нам право быть в данном случае краткими.

Еще в п р е д и с т о р и и дифференциального и интегрального исчисления встречались — как их называли тогда — «обратные задачи на касательные», т. е. задачи, в которых ищутся кривые по заданному свойству касательных к ним. Об этих задачах упоминается в известной переписке Ньютона с Лейбницем [n° 228]; там впервые Лейбниц применил термин «дифференциальные уравнения».

Вторая основная проблема, выдвинутая Ньютоном в его «Методе флюксий»: *по данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюэнтами*, как мы указали в n° 225, и есть общая задача интегрирования *обыкновенного дифференциального уравнения*. Ньютон, как правило, решает ее с помощью степенных рядов, не стремясь представить решение в виде «конечного» аналитического выражения. Много занимались дифференциальными уравнениями Лейбниц и братья Бернулли, иной раз также пользуясь бесконечными рядами. Но в то же время именно им принадлежат первые систематические попытки решения некоторых типов уравнений первого порядка путем с в е д е н и я к к в а д р а т у р а м.

Лишь в XVIII веке теория дифференциальных уравнений развилась настолько, что ее стали рассматривать как самостоятельную научную дисциплину. Большую роль в этом сыграли многочисленные и разнообразные труды Эйлера.

Напомним, что именно Эйлер ввел понятия «полного» (о б щ е г о) и «частного» решения обыкновенного дифференциального уравнения; много занимался он и решениями, не содержащимися в полном интеграле (о с о б ы м и). Он широко развил метод и н т е г р и р у ю щ е г о м н о ж и т е л я не только для уравнений первого, но и высшего порядка. Эйлеру принадлежит метод решения однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с помощью х а р а к т е р и с т и ч е с к о г о у р а в н е н и я и выяснение формы его общего интеграла. В связи с проблемой колебания круговой мембраны Эйлер первым пришел к рассмотрению общего

уравнения цилиндрических функций

$$\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2} = 0$$

(позднее названного «уравнением Бесселя»), представив решение его в виде бесконечного ряда. Эйлеру же принадлежит первый метод приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работы Эйлера, вместе с работами Клеро, Лагранжа и других математиков XVIII века, далеко продвинули формальную теорию *обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Обратимся теперь к *дифференциальным уравнениям в частных производных.* И в этой области Эйлер имеет значительные заслуги. Ряд исследований он посвятил уравнениям первого порядка. С другой стороны, многие задачи механики и физики часто приводили Эйлера к рассмотрению уравнений второго (и высшего) порядка *). Особенностью уравнений в частных производных было появление в составе решения произвольных функций. Это первым заметил на примере уравнения колебания струны Даламбер [n° 420], но именно Эйлер использовал произвольные функции для того, чтобы удовлетворить начальным данным, вытекающим из рассматриваемой задачи, и тем довести исследование до конца.

Большое влияние на последующее развитие математической физики оказали также разнообразные работы современника Эйлера — Даниила Бернулли. Ему принадлежит общий метод для решения задач о колебании упругих систем, при котором искомое решение соответствующего уравнения разлагается в ряд по простейшим его решениям; примером этого может служить решение уравнения колебания струны [n° 421]. Расцвет математической физики приходится уже на начало XIX века и связан с именами Пуассона, Фурье, Коши и Остроградского.

Общее стремление к повышению строгости естественно привлекло внимание к вопросу о самом существовании решения дифференциальных уравнений (или составленных из них систем). По отношению к обыкновенным уравнениям первые результаты здесь были получены Коши, а по отношению к уравнениям в частных производных — Софией Ковалевской **).

В конце прошлого века, в связи с потребностями механики и астрономии, появились исследования *по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений* и *их систем*, устанавливающие различные свойства решений — по самим уравнениям, без их интегрирования. Основоположниками этой теории были Пуанкаре и Ляпунов ***). Идеи Ляпунова получили дальнейшее развитие уже в трудах советских математиков.

Отметим еще, что в последнее время проявилось определенное влияние на теорию дифференциальных уравнений (особенно — в частных производных) со стороны молодых аналитических дисциплин — *теории функций вещественной переменной* и *функционального анализа* (см. разделы V и VI). Это влияние не только отразилось на общих точках зрения и подходе к основным понятиям теории дифференциальных уравнений, но и привело к важным конкретным результатам в этой теории.

---

*) Подобные задачи и решение соответствующих уравнений составляют предмет так называемой *математической физики.*

**) София Васильевна Ковалевская (1850—1891) была первой женщиной, получившей звание профессора математики.

***) Французский ученый Анри Пуанкаре (1854—1912) и русский академик Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918) — выдающиеся математики.

II. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Вариационное исчисление возникло в конце XVII века, вскоре после создания самого «анализа бесконечно малых», но вместе с тем оно составляет как бы главу так называемого *функционального анализа*, который развился уже в нашем веке (см. раздел VI).

Для ясности изложения, установим сначала одно понятие, принадлежащее именно функциональному анализу.

Пусть имеем плоскую кривую (черт. 84).

$$y=f(x) \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1).$$

Черт. 84.

Рассмотрим: 1) площадь P ограниченной ею криволинейной трапеции, 2) длину S кривой, 3) площадь Q поверхности, полученной при вращении кривой вокруг оси x, и, наконец, 4) объем V тела вращения, ограниченного этой поверхностью. Всё это примеры величин, *зависящих от вида кривой* или — что то же — *от вида функции f*, т. е. *сразу от всех ее значений*. Для приведенных величин мы имели в свое время интегральные представления [n° **196, 201, 205, 198**]:

$$\left.\begin{aligned} P&=\int_{x_0}^{x_1} y(x)\,dx, \quad S=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx,\\ Q&=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx, \quad V=\pi\int_{x_0}^{x_1}[y(x)]^2\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Мы видим, что функция y играет роль своеобразного «аргумента»: *ее заданием однозначно определяется значение каждой из этих величин.* В подобном случае, *когда функции $y=y(x)$ относится по определенному правилу числовое значение некоторой величины, эту величину называют **функционалом** от функции y* и обозначают

$$U(y).\,^{*)}$$

Все функционалы (1) содержатся, как частные случаи, в следующем:

$$U(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx, \tag{2}$$

где под F разумеется данная функция от трех аргументов, а $y=y(x)$ — любая (непрерывно дифференцируемая) функция от x, для которой подинтегральное выражение и самый интеграл имеют смысл.

Ограничиваясь для краткости именно функционалами типа (2), мы можем теперь сформулировать простейшую вариационную задачу: *среди всех*

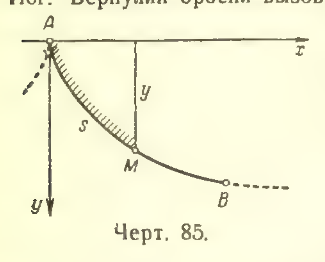
---

*) Нельзя путать функционал с функцией от функции, т. е. со сложной функцией, которая каждому значению x в отдельности относит число, в то время как функционал относит число всей функции $y(x)$ в целом!

гладких кривых $y = y(x)$, *соединяющих две точки* (x_0, y_0) *и* (x_1, y_1), *найти ту, для которой функционал* (2) *имеет наибольшее (наименьшее) значение.*

Чаще, впрочем, функционал исследуется на «локальный» максимум (минимум) — значение функционала на искомой кривой сравнивается с его значениями лишь на кривых, достаточно «близких» (в том или ином смысле) к искомой. Легко усмотреть здесь аналогию с определением «локальных» экстремумов в случае функции от одной или нескольких переменных [n° 112, 151].

Зарождение вариационного исчисления обычно датируют 1696 г., когда Иог. Бернулли бросил вызов математикам своего времени на решение (поставленной еще Галилеем) *задачи о брахистохроне* («кривой кратчайшего времени»). Вот в чем она состоит: *из всех линий, соединяющих две данные точки* A *и* B (черт. 85), *не лежащие на одной вертикали, требуется найти ту кривую, по которой материальная точка скатится из точки* A *в точку* B — *без начальной скорости и под действием одной лишь силы тяжести* — *в кратчайшее время.* Искомой кривой оказалась циклоида, основание которой горизонтально, а острие находится в точке A.



Черт. 85.

Покажем, что и в этой задаче мы имеем дело с функционалом типа (2). Пусть координатные оси расположены, как указано на чертеже. При перемещении материальной точки массы m по произвольной кривой $y = y(x)$, соединяющей точки $A(0, 0)$ и $B(x_1, y_1)$, из положения A в положение $M(x, y)$, сила тяжести произведет работу $mg \cdot y$, которая — по закону живых сил — должна быть равна кинетической энергии $\frac{1}{2}mv^2$ точки. Отсюда

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

и

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx.$$

Интегрируем по x от 0 до x_1, и тогда для времени T, затрачиваемого на всё перемещение из A в B, окончательно получим выражение

$$T = T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx \tag{3}$$

вида (2).

За этой задачей последовали другие; все они решались по-разному и требовали каждая особого подхода: создалось положение, напоминавшее предисторию самого анализа бесконечно малых!

С 1726 г. в изданиях Петербургской академии начался ряд публикаций Эйлера, посвященных экстремальным задачам этого нового типа. Они были подытожены в знаменитом трактате «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойством максимума либо минимума, ...» (1744 г.)*). Здесь впервые дается «прямой» общий метод решения различных типов вариационных задач. Заменяя кривую линию ломаной, Эйлер сводит вариационную задачу к задаче на разыскание экстремума функции нескольких переменных

*) Есть русский перевод (ГТТИ, 1934).

Например, в случае простейшей вариационной задачи, речь идет об экстремуме суммы

$$\sum_i F\left(x^{(i)},\ y^{(i)},\ \frac{\Delta y^{(i)}}{\Delta x^{(i)}}\right)\cdot \Delta x^{(i)}$$

как функции от ординат $y^{(i)}$ ломаной. Приравняв нулю производную этого выражения по любой ординате, Эйлер в конечном счете приходит к дифференциальному уравнению второго порядка

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$$

или — в развернутом виде —

$$F'_y-F''_{yx'}-F''_{yy}\cdot y'-F''_{y'y'}\cdot y''=0.$$

Это уравнение, таким образом, выражает необходимое условие для того, чтобы кривая $y=y(x)$ доставляла функционалу (2) экстремум. Если удается решить дифференциальное уравнение Эйлера, с учетом предельных условий: $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, то чаще всего сразу и получается искомая кривая. Так, в случае задачи о брахистохроне можно взять [см. (3)]

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}},$$

и уравнение Эйлера принимает вид:

$$2yy''+y'^2+1=0.$$

Отсюда, понижая порядок, легко найти первый интеграл

$$y(y'^2+1)=2C_1,$$

так что

$$dx=\sqrt{\frac{y}{2C_1-y}}\,dy.$$

Полагая здесь $y=C_1(1-\cos t)$, найдем, что $dx=C_1(1-\cos t)\,dt$, следовательно, $x=C_1(t-\sin t)+C_2$. Считая, что при $t=0$ кривая проходит через начало, имеем $C_2=0$; постоянная же C_1 определится из требования, что кривая проходит и через вторую данную точку. Так и получаем упомянутую выше циклоиду.

Несмотря на громоздкость методов Эйлера и нестрогость его рассуждений, именно *эти исследования положили начало вариационному исчислению как особой математической дисциплине.*

Несколько позже молодой тогда Лагранж открыл новую страницу в истории вариационного исчисления созданием *метода вариаций*, откуда и само исчисление получило свое наименование. В 1755 г. он сообщил его Эйлеру, который в позднейших работах и сам уже пользуется новым методом. Понятие вариации сродни понятию дифференциала в обычном анализе, но связано не с изменением переменной x, а с изменением («варьированием») вида функции $y(x)$. Если функция $y=y(x)$ доставляет функционалу $U(y)$ экстремум, то вариация U, δU, обращается в нуль (снова — лишь необходимое условие!).

Прерывая на этом моменте историю вариационного исчисления, мы упомянем лишь, что лагранжева теория была распространена Остроградским на случай кратных интегралов; в дальнейшем были установлены и достаточные условия экстремума; наконец, в последние десятилетия вновь

возник интерес к идеям Эйлера, и его методы послужили прообразом для «прямых» методов решения вариационных задач (в значительной мере — в трудах советских математиков).

Почти все основные законы механики и физики обычно формулируются как «вариационные принципы», устанавливающие, что вариация того или иного функционала должна быть нулем. В связи с этим вариационное исчисление доставляет решение многих важных задач физики и техники.

III. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Комплексные числа появились в математическом обиходе с начала XVI века, но осваивались они на протяжении столетий медленно и с трудом. Лишь в XVIII веке Эйлер (снова мы должны назвать имя этого гениального и столь разностороннего ученого!) стал рассматривать комплексную переменную и функции от нее. В течение тридцатых и сороковых годов он разработал всю *теорию элементарных функций комплексной переменной*, использовав для этого не только аппарат степенных рядов (известный со времен Ньютона), но также бесконечные произведения и ряды простых дробей. Им же, как мы уже знаем [n° **254**], была установлена замечательная связь между показательной и тригонометрическими функциями.

Другой важный цикл работ Эйлера относится к *интегрированию по комплексной переменной* (здесь — в смысле вычисления первообразной). В одной из них, представленной Петербургской академии в 1777 г., но опубликованной лишь в 1793 г., Эйлер рассматривает интеграл $\int Z(z)\,dz$, разумея под $Z(z)$ функцию, заданную аналитически (например, степенным рядом), и подставляет сюда вместо z мнимую величину $x+yi$ *). Тогда сам интеграл принимает вид $P(x, y)+$ $+Q(x, y)\,i$, а подинтегральное выражение преобразуется так:

$$[M(x, y)+N(x, y)\,i]\,[dx+dy\,i]=[M\,dx-N\,dy]+[N\,dx+M\,dy]\,i.$$

Сравнение порознь вещественных и мнимых частей получаемого равенства приводит к двум интегралам

$$P=\int M\,dx-N\,dy, \qquad Q=\int N\,dx+M\,dy.$$

Так как дифференциальные выражения $M\,dx-N\,dy$ и $N\,dx+M\,dy$ оказываются, таким образом, точными дифференциалами (соответственно, для P и Q), то M и N необходимо связаны характерными для точных дифференциалов [n° **350**] соотношениями

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}. \tag{4}$$

Так впервые в общем виде появляются соотношения между частными производными вещественной и мнимой частей функции Z комплексной переменной **). Этим соотношениям суждено было сыграть важную роль как в дальнейшем развитии самой теории функций, так и в ее приложениях.

Славу создания этой теории как самостоятельной и богатой содержанием научной дисциплины разделяют Коши и Риман.

---

*) Мы для краткости здесь и дальше пишем привычное нам i, хотя в этом месте Эйлер пишет еще $\sqrt{-1}$. Вскоре именно он ввел обозначение i, которое, однако, привилось далеко не сразу.

**) Подобные соотношения, впрочем, уже встречались в гидромеханических исследованиях Даламбера (1752 г.) и самого Эйлера.

В самом начале своего «Мемуара об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» (1825 г.) Коши устанавливает понятие *определенного интеграла*

$$\int_{x_0+y_0 i}^{X+Yi} f(z)\,dz \tag{5}$$

как предела интегральных сумм — наподобие *криволинейного* интеграла [n° 330]. Впрочем, упоминание о «кривой» мы находим в другом месте мемуара, а здесь Коши просто рассматривает две монотонные непрерывные функции, имеющие (непрерывные) производные:

$$x=\varphi(t),\quad y=\chi(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant T) \tag{6}$$

под условием, что

$$\varphi(t_0)=x_0,\quad \varphi(T)=X;\quad \chi(t_0)=y_0,\quad \chi(T)=Y,$$

и сводит интеграл (5) к обыкновенному интегралу по вещественной переменной t [ср. n° 331, (6)]:

$$\int_{t_0}^{T} f(\varphi(t)+\chi(t)\,i)\,(\varphi'(t)+\chi'(t)\,i)\,dt.$$

Здесь же — в предположении, что функция $f(z)$ имеет (непрерывную) производную — устанавливается фундаментальная теорема о *независимости интеграла* (5) *от выбора функций* (6) (т. е. от пути интегрирования). Доказательство теоремы Коши проводит вариационным методом.

При этом же допущении относительно функции $f(z)$ Коши в дальнейших публикациях и в своих лекциях устанавливает факт *обращения в нуль интеграла по замкнутому контуру,* а также выводит знаменитую формулу, носящую его имя:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

где интеграл взят по контуру (C) области (K) на комплексной плоскости, а z — любая *внутренняя* точка этой области. Мы сталкиваемся здесь с замечательным свойством рассматриваемого класса функций комплексной переменной: *значения функции внутри области однозначно определяются ее значениями на контуре!*

Хотя формула Коши была доказана им при одном лишь предположении, что функция $f(z)$ имеет в рассматриваемой области (непрерывную) *первую* производную, но из самой формулы, например, с помощью последовательного дифференцирования по z под знаком интеграла, непосредственно выводится, что *для $f(z)$ одновременно существуют и производные всех порядков!* Больше того: принимая за область (K) круг радиуса r с центром в точке z_0, можно утверждать, что *в этом круге функция $f(z)$ разлагается в ряд по степеням $z-z_0$, который оказывается ее рядом Тейлора* [ср. n° 277]. Отсюда вытекает и общее утверждение, сделанное Коши относительно радиуса сходимости ряда Тейлора: *этот радиус всегда равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей «особой» точки $f(z)$* — в окрестности которой $f(z)$ перестает быть однозначной функцией, имеющей (непрерывную) производную.

Этим проливается свет, например, на то загадочное обстоятельство, что функция $\operatorname{arctg} x$ и ее производная $\frac{1}{1+x^2}$ разлагаются в ряд по степеням x лишь внутри промежутка от -1 до $+1$, с радиусом сходимости единица. На вещественной оси у них вообще «особенностей» нет, но если перейти в комплексную область, то для соответствующих функций комплексной переменной z: $\operatorname{arctg} z$ и $\frac{1}{1+z^2}$, «особыми» точками будут точки $z=\pm i$ на мнимой оси, вследствие чего радиус сходимости равен модулю обоих этих чисел, т. е. единице. Так теория функций комплексной переменной позволяет иной раз осознать закономерности, относящиеся к функциям вещественной переменной!

Полезно дать себе отчет в том, что требование существования производной от функции $w=f(z)$ по ее *комплексному* аргументу z несравненно тяжелее, чем формально аналогичное требование в отношении функции от *вещественного* аргумента. Ведь предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz}$$

должен быть одним и тем же, *независимо от направления, по которому $z+\Delta z$ приближается к z.* В этом и состоит истинное объяснение тех поразительных следствий, которые влечет за собой простой факт существования (непрерывной) производной от функции по *комплексному* аргументу. Вопрос об *условиях существования такой единственной производной* возник сравнительно поздно: Коши приходит к этому вопросу в 1847 г., а Риман в 1851 г. именно с него начинает свою диссертацию «Основы общей теории функций одной комплексной переменной» *). Если положить $z=x+yi$ и $w=u+vi$, где u, v суть вещественные функции от двух вещественных переменных x, y, то упомянутые условия сводятся к соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4a}$$

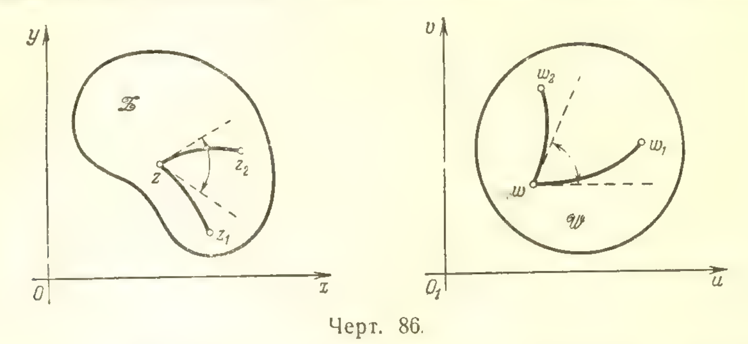
в которых читатель узнает эйлеровы уравнения (4). Эти соотношения и служат основой для тех применений, которые находят функции комплексной переменной в электростатике, гидро- и аэромеханике, теории упругости и, наконец, в теории распространения тепла.

Если комплексные переменные z и w истолковать как точки на соответствующих плоскостях, то функциональная зависимость между ними $w=f(z)$ относит каждой точке z в области $\mathfrak{Z}$ на плоскости значений аргумента — определенную точку w в области $\mathfrak{W}$ на плоскости значений функции. Иными словами, функция $w=f(z)$ осуществляет *точечное преобразование области $\mathfrak{Z}$ в область $\mathfrak{W}$* (черт. 86). Из существования в области $\mathfrak{Z}$ для функции $f(z)$ единственной производной (лишь бы она не обращалась в нуль!) Риман выводит такое замечательное свойство этого преобразования: *если взять в области $\mathfrak{Z}$ две пересекающиеся кривые* (zz_1 и zz_2 на черт. 86), *а в области $\mathfrak{W}$ — соответствующие им кривые* (ww_1 и ww_2), *то углы между ними в обоих случаях будут одни и те же* (при одинаковых направлениях отсчета): преобразование оказывается сохраняющим углы или, как говорят, конформным!

Конформные преобразования, в связи с вопросом о черчении карт, рассматривались Эйлером, Лагранжем и Гауссом задолго до Римана. Но Риман первый отчетливо связал свойство функции $w=f(z)$ совершать конформное

*) См. Бернгард Риман, *Сочинения* (Гостехиздат, 1948), стр. 49—87.

преобразование с наличием у нее определенной производной. Он же доказал основную в теории конформных преобразований теорему о *возможности* (а при определенных условиях — и единственности) *конформного преобразования круга в произвольную односвязную область, и обратно.* Подобными



Черт. 86.

преобразованиями часто пользуются в различных приложениях теории функций комплексной переменной. Эта именно мысль и лежала в основе созданной Жуковским *) теории крыла самолета.

На дальнейшем блестящем развитии теории функций комплексной переменной мы уже не останавливаемся.

IV. ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение относительно искомой функции, содержащее эту функцию под знаком интеграла, называется *интегральным уравнением* **). При разыскании неизвестной функции часто бывает удобнее исходить именно из интегрального уравнения, предпочтительно перед дифференциальным. С таким положением вещей читатель уже сталкивался при доказательстве «теоремы существования» в теории дифференциальных уравнений: там, например, уравнение $y' = f(x, y)$ вместе с начальным условием $y(x_0) = y_0$ заменялось одним интегральным уравнением

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx + y_0,$$

к которому затем с удобством применялся метод последовательных приближений. В нашем курсе мы уже, формально говоря, имели дело с интегральными уравнениями, когда изучали преобразования Фурье [n° **412**, формулы (13), (14), (15)].

Важную роль в привлечении внимания математиков к интегральным уравнениям сыграла одна механическая задача, поставленная и решенная Абелем (1826 г.). В ней требовалось *найти такую кривую AB в вертикальной*

---

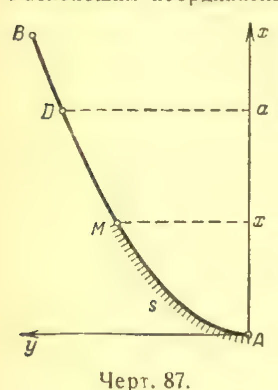
*) Николай Егорович Жуковский (1847—1921) — знаменитый русский ученый.

**) Этот термин впервые встречается в 1888 г. у дю Буа-Реймона; последний отчетливо говорит о том, что успехи в теории дифференциальных уравнений в частных производных связаны с изучением интегральных уравнений, «о которых, однако, ничего неизвестно»!

плоскости (черт. 87), *чтобы время* τ, *в течение которого тяжелая материальная точка, выпущенная из любой точки* D *без начальной скорости, скатывается вдоль по кривой до наинизшей ее точки* A, *представляло наперед заданную непрерывную функцию от высоты* a *точки* D:

$$\tau = \varphi(a).$$

Расположим координатные оси, как указано на чертеже, и пусть уравнение искомой кривой будет $y = y(x)$. При переходе точки из начального положения D в M, по закону живых сил, будем иметь (как и выше — в задаче о брахистохроне)



Черт. 87.

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg(a-x), \quad v = \frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(a-x)}\,^{*)},$$

откуда

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(a-x)}},$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{\sqrt{a-x}}\, dx.$$

Обозначая $\sqrt{1+[y'(x)]^2}$ через $\sqrt{2g}\,u(x)$, для определения неизвестной функции $u(x)$ будем иметь интегральное уравнение

$$\int_0^a \frac{u(x)\,dx}{\sqrt{a-x}} = \varphi(a). \tag{7}$$

Абель фактически решал даже более общее уравнение

$$\int_0^a \frac{u(x)\,dx}{(a-x)^\alpha} = \varphi(a) \qquad (0 < \alpha < 1);$$

мы для простоты ограничимся уравнением (7).

Умножим обе части его на $\dfrac{1}{\sqrt{z-a}}$ и проинтегрируем по a от 0 до z:

$$\int_0^z \frac{\varphi(a)\,da}{\sqrt{z-a}} = \int_0^z da \int_0^a \frac{u(x)\,dx}{\sqrt{(z-a)(a-x)}}.$$

Переставим интегрирования в повторном интеграле справа, по формуле (9) n° **344** **):

$$\int_0^z u(x)\,dx \int_x^z \frac{da}{\sqrt{(z-a)(a-x)}}.$$

---

*) Напоминаем, что с возрастанием t дуга $s = \smile AM$ убывает.

) Областью (P), о которой упоминается в замечании 1 n° **344, здесь

Так как внутренний интеграл здесь равен π [n°292, 1)], то приходим к равенству

$$\int_0^z \frac{\varphi(a)\,da}{\sqrt{z-a}} = \pi \int_0^z u(x)\,dx$$

и — дифференцируя по z — окончательно получаем такое выражение для искомой функции:

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{\varphi(a)\,da}{\sqrt{z-a}}.$$

Зная $u(x)$, нетрудно уже затем определить и $y(x)$.

Уравнение Абеля — с сохранением принципа его решения — значительно позже (1884 г.) было обобщено Сониным*). Вопрос казался завершенным, когда в 1896 г. Вольтерра**) начал публикацию ряда исследований, в которых излагалась общая теория интегральных уравнений вида

$$\int_a^x N(x, s)\,\varphi(s)\,ds = F(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) + \int_a^x N(x, s)\,\varphi(s)\,ds = F(x),$$

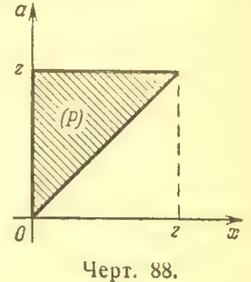
получивших впоследствии наименование «интегральных уравнений Вольтерра», соответственно, первого и второго рода. Здесь искомой функцией является $\varphi(x)$, а $N(x, s)$ и $F(x)$ суть данные функции. Вскоре же после этого, в период с 1900 по 1903 г., появились замечательные работы Фредгольма***), посвященные уравнениям

$$\int_a^b N(x, s)\,\varphi(s)\,ds = F(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) + \int_a^b N(x, s)\,\varphi(s)\,ds = F(x).$$

Эти «уравнения Фредгольма» первого и второго рода отличаются от «уравнений Вольтерра», тем, что здесь в интегралах **оба** предела постоянные. (Впрочем, можно считать уравнения Вольтерра частным случаем уравнений Фредгольма, если положить $N(x, s) = 0$ для $s > x$.)

Не входя в изложение теории Фредгольма, ограничимся указанием, что она представляет в некотором смысле как бы предельный случай теории алгебраических линейных уравнений.

В течение истекшей половины нашего века теория интегральных уравнений получила широкое развитие в разных направлениях и приобрела важность как могущественное средство исследования явлений природы.



Черт. 88.

служит треугольник, изображенный на черт. 88. Впрочем, ввиду обращения подинтегральной функции в ∞ при $a = x$ или $a = z$, нужно было бы еще дополнительно обосновать перестановку интегралов.

*) Академик Николай Яковлевич Сонин (1849—1915).

**) Вито Вольтерра (1860—1940) — итальянский математик.

***) Эрик Ивар Фредгольм (1866—1927) — шведский математик.

V. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Хотя весь курс математического анализа был посвящен именно изучению функций от вещественных переменных, но под указанным в заголовке названием разумеют не эту «классическую» часть анализа, а более возвышенную и тонкую теорию, появившуюся лишь с начала нашего столетия. Впрочем, истоки ее можно усмотреть в том критическом направлении в математике, возникшем в конце XVIII и в начале XIX века, о котором не раз упоминалось. *Повышающиеся требования к строгости математических доказательств заставляли усомниться в ряде наивных рассуждений старых математиков.* Например, попытка Ампера (1806 г.) и еще некоторых авторов доказать дифференцируемость любой непрерывной функции, исключая разве лишь отдельные точки, вызвала к жизни противоречащие этому примеры Больцано, Вейерштрасса и др. [ср. n° **271**]. С другой стороны, *возникшее стремление к общности и само по себе создавало интерес к функциям с различными «патологическими» особенностями,* часто идущими вразрез с нашей интуицией.

Все это направление, носившее негативный характер (и, кстати сказать, вызывавшее яркое недовольство со стороны представителей «классического» анализа) относится к предистории занимающей нас сейчас научной дисциплины. Переход от критики старого и увлечения «патологией» к позитивной теории был в высокой мере стимулирован *теорией бесконечных множеств,* созданной в семидесятых и восьмидесятых годах прошлого столетия Георгом Кантором. Его идеи, тоже встретившие поначалу со стороны современников противодействие, впоследствии оказали большое влияние на развитие многих областей математики, в особенности же — *теории функций вещественной переменной.*

Эта последняя как самостоятельная научная дисциплина оформилась на рубеже XIX и XX столетий в трудах французской математической школы, виднейшими представителями которой являются Эмиль Борель (1871—1956), Рене Бэр (1874—1932) и Анри Лебег (1875—1941).

Важную роль сыграло введенное Борелем (1898 г.) и Лебегом (1902 г.) понятие *меры линейного точечного множества*, применимое к очень широкому классу так называемых *измеримых* множеств. Мера mE точечного множества E обобщает понятие длины промежутка. Подобно длине, она обладает свойством аддитивности, но в еще более широкой степени: именно, если ограниченное множество E представляет собой объединение конечного числа или даже бесконечного (но в этом случае — непременно нумерованного) множества измеримых множеств

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots,$$

не имеющих попарно общих точек, то E измеримо, причем *мера E равна сумме* (или сумме ряда) *мер множеств E_n:*

$$mE = \sum_n mE_n.$$

Если точечное множество E может быть покрыто конечной или (нумерованной) бесконечной системой промежутков с произвольной малой суммой длин, то его мера равна нулю. Пусть функция $f(x)$, заданная в промежутке $[a, b]$, обладает определенным свойством во всех точках промежутка за исключением разве лишь точек некоторого множества нулевой меры; тогда говорят, что функция имеет это свойство «почти всюду» в названном промежутке. Мы используем это выражение в формулировках следующих двух теорем Лебега:

1. *Функция $f(x)$, монотонная в промежутке $[a, b]$, имеет почти всюду в этом промежутке двухстороннюю конечную производную.*

II. *Непрерывная спрямляемая кривая* $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ *имеет почти всюду определенную касательную.*

Эти теоремы приведены как примеры позитивных результатов новой теории; как видим, в них нет речи о «патологии», а устанавливаются общие и весьма тонкие закономерности, и притом в таких областях, где методы классического анализа оказались бессильными.

Большое значение в современном анализе приобрело принадлежащее Лебегу обобщение понятия определенного интеграла. Пусть читатель вспомнит риманово определение этого понятия [n° **176**]. Для случая непрерывной функции*) оно вполне естественно: говоря геометрически, при малом Δx_i все ординаты кривой $y=f(x)$, отвечающие изменению абсциссы между x_i и x_{i+1}, мало отличаются от любой из них, $f(\xi_i)$, и, заменяя приближенно элементарную полоску элементарным прямоугольником с площадью $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, можно ждать, что предел суммы

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

и даст точно величину площади под кривой. Если же функция $f(x)$ разрывна, то для упомянутой замены уже нет оснований! В действительности же определение Римана оказывается формально применимым лишь к узкому классу разрывных функций, в некотором смысле «мало разнящихся» от непрерывных (а именно, как показал Лебег, — лишь к функциям, которые «почти всюду» непрерывны).

В этой связи уместно вспомнить, что если функция $F(x)$ имеет в промежутке $[a, b]$ непрерывную производную $F'(x)$, то по этой производной первообразная функция легко «восстанавливается» с помощью определенного интеграла [n° **155** и **183**, (12°)]:

$$F(x)=(R)\int_a^x F'(x)\,dx+C. \tag{8}$$

Однако в случае разрывной (хотя бы и ограниченной) производной эта формула может оказаться неприложимой просто из-за того, что риманов интеграл для $F'(x)$ не существует. Такой именно пример еще в 1881 г. построил Вольтерра.

Все эти обстоятельства и послужили основанием для создания нового, обобщенного, определения понятия интеграла.

Выясним основную идею лебегова определения интеграла для ограниченной функции $f(x)$:

$$A<f(x)<B \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Лебег дробит на части не промежуток изменения независимой переменной, а промежуток $[A, B]$, в котором содержатся значения самой функции:

$$A=y_0<y_1<y_2<\ldots\, y_i<y_{i+1}<\ldots<y_n=B,$$

и рассматривает (при $i=0, 1, \ldots, n-1$) множество E_i тех точек, в которых значения функции лежат между y_i и y_{i+1}:

$$y_i \leqslant f(x)<y_{i+1}.$$

При малом $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ все эти значения, действительно, близки

---

*) Напомним, что именно для этого случая оно и было высказано Коши задолго до Римана.

между собой и мало разнятся, например, от y_i. Заменяя их все на y_i и умножая это число на меру множества E_i, составим сумму

$$\sum_i y_i \cdot mE_i. \qquad (9)$$

Конечно, при этом нужно предположить, что множество точек x из $[a, b]$, для которых значения функции $f(x)$ лежат между какими-нибудь числами α и β ($\beta > \alpha$), всегда измеримо; только такие функции Лебег и рассматривает, называя их *измеримыми*. Для суммы (9), какова бы ни была ограниченная измеримая функция $f(x)$, всегда существует конечный предел при $\Delta y_i \to 0$; он и представляет собой *лебегов интеграл функции $f(x)$ от a до b* и обозначается символом

$$(L) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Область применимости интеграла Лебега несравненно шире, чем интеграла Римана. В частности, с его помощью всегда можно «восстановить» первообразную функцию $F(x)$ по ее ограниченной производной $F'(x)$:

$$F(x) = (L) \int_a^x F'(x)\, dx + C. \qquad (8a)$$

Лебегово определение распространяется и на случай неограниченной функции; получаемый при этом интеграл оказывается абсолютно сходящимся. Впоследствии были предложены и дальнейшие обобщения понятия интеграла, при которых интеграл может сходиться и неабсолютно, но ни одно из них не нашло такого широкого и плодотворного применения в разных областях анализа, как интеграл Лебега.

Дальнейшие успехи теории функций вещественной переменной существенно связаны с деятельностью московской математической школы, основателями которой были Дмитрий Федорович Егоров (1869—1931) и академик Николай Николаевич Лузин (1883—1950). Приводимые ниже, в виде примера, две фундаментальные теоремы принадлежат: первая — Егорову, а вторая — Лузину. Они показывают, что — несмотря на чрезвычайную общность объектов, изучаемых современной теорией функций — связь с классическим анализом, в некотором смысле, не утеряна. Вот эти теоремы:

I. *Сходимость любой последовательности $\{f_n(x)\}$ измеримых функций к предельной функции $f(x)$ оказывается равномерной, если пренебречь некоторым точечным множеством произвольно малой меры.*

II. *Любая измеримая функция $f(x)$ оказывается непрерывной, если пренебречь некоторым точечным множеством произвольно малой меры.*

Заслугой московской школы является не только дальнейшее развитие самой теории функций вещественной переменной, но и внедрение ее понятий и методов в другие области анализа, а также — в теорию вероятностей.

До сих пор мы вели речь лишь о так называемой *метрической теории функций*, существенно использующей понятие меры точечного множества. Другая ветвь новой теории функций, называемая *дескриптивной*, ведет происхождение от работ Бэра (1899 г.) и Лебега (1905 г.), в которых изучалось строение и свойства разрывных функций с точки зрения их образования из непрерывных функций с помощью последовательных предельных переходов. Эти исследования тесно связаны с *дескриптивной теорией множеств*, где изучаются все более и более сложные классы точечных множеств, полу-

чаемых с помощью ряда простейших операций из промежутков (прямоугольников и т. п.). Ведущая роль в дальнейшем развитии и углублении названной теории также принадлежит Лузину и его ученикам.

Коснемся здесь же еще одной ветви математического анализа, называемой *конструктивной теорией функций*. Она занимается вопросами приближенного представления функции с помощью различных аналитических аппаратов, простейшими примерами которых служат алгебраические или тригонометрические многочлены.

Пафнутий Львович Чебышёв в работе «Теория механизмов, известных под названием параллелограмов» *) (1854 г.), отметил, что отрезок ряда Тейлора функции $f(x)$

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

лучше других многочленов той же степени представляет функцию *лишь вблизи точки* $x = x_0$. Если же речь идет о приближенном представлении функции многочленом n-й степени *в фиксированном промежутке* $[a, b]$, то тейлорову многочлену следует предпочесть другой многочлен, $P_n(x)$, с тем, чтобы «предел его уклонений от $f(x)$ в данном промежутке был менее пределов уклонений всех других многочленов той же степени». Так, впервые была поставлена задача о «многочлене наилучшего приближения», определяемого из условия, что

$$\max_{a \leq x \leq b} |P_n(x) - f(x)|$$

имеет наименьшее возможное значение; последнее обычно обозначают через $E_n(f)$. Исследования Чебышёва послужили исходным пунктом для обширного ряда работ петербургской математической школы.

В 1885 г. Вейерштрасс опубликовал теорему [n° 278], из которой явствует, что для любой непрерывной в $[a, b]$ функции $f(x)$

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0;$$

разумеется и, наоборот, из наличия последнего соотношения вытекает непрерывность функции f [n° 266]. Это было простейшим примером взаимосвязи между структурным свойством функции f (непрерывность) и поведением величины $E_n(f)$ (стремление к нулю).

Идеи Чебышёва и Вейерштрасса получили существенное развитие в исследованиях академика Сергея Натановича Бернштейна (род. в 1880 г.) и других советских математиков, а также американского ученого Данхема Джексона (1888—1946). Через эти работы красной нитью проходит мысль о влиянии дифференциальных и иных структурных свойств функции $f(x)$ на быстроту стремления величины $E_n(f)$ к нулю, и наоборот.

VI. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Это — самая молодая из всех ветвей математического анализа: ее возраст исчисляется немногими десятилетиями! Возникновению функционального анализа способствовала не раз замечавшаяся аналогия между далекими на первый взгляд объектами, побуждающая искать как объединяющие их понятия, так и общие рассуждения, которые покрывали бы частные рассуждения над этими объектами, используя лишь то, что в них на деле существенно.

---

*) *Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева*, т. II (изд. Академии наук, 1947), стр. 23—51.

Замечательно при этом, что многообразия рассматриваемых объектов обычно уподобляются в тех или иных отношениях реальному пространству. Эти многообразия тоже называют *пространствами,* хотя элементами их могут быть — смотря по случаю — объекты самой разнообразной природы: кривые или поверхности, функции от одной или нескольких непрерывно меняющихся аргументов, конечные системы или последовательности вещественных чисел (т. е. функции от натурального аргумента), и т. д. Мы уже сталкивались с подобными «пространствами» в n° **125** (арифметическое m-мерное пространство), в n° **418** (пространство непрерывных функций) и, наконец, в разделе II, посвященном вариационному исчислению (пространство гладких кривых или непрерывно дифференцируемых функций).

В таком пространстве $X = \{x\}$ рассматриваются и изучаются *функциональные операторы*

$$y = U(x) \tag{10}$$

(обобщение привычного нам понятия «функция»), которые сопоставляют — по тому или иному закону или правилу — каждому элементу x из X определенный элемент y того же или другого пространства Y. В том частном случае, когда Y есть просто множество вещественных чисел, так что элементу x сопоставляется число, функциональный оператор называется *функционалом* — с этим понятием мы тоже выше уже имели дело (см. раздел II).

Мы остановимся лишь на одном важном типе пространств, именно на *метрических пространствах.* Так называется пространство X, если для каждой пары принадлежащих ему элементов x и $\bar{x}$ определено *расстояние* («метрическая функция»), т. е. неотрицательное вещественное число $\rho(x, \bar{x})$, имеющее следующие свойства:

1) $\rho(x, \bar{x}) = 0$ равносильно $x = \bar{x}$;

2) $\rho(\bar{x}, x) = \rho(x, \bar{x})$

и, наконец,

3) $\rho(x, \bar{\bar{x}}) \leqslant \rho(x, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ [«аксиома треугольника»; ср. n° **125** и **418**].

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к предельному элементу x определяется соотношением:

$$\rho(x_n, x) \to 0;$$

при этом пишут

$$x = \lim x_n \quad \text{или} \quad x_n \to x.$$

Приведем примеры метрических пространств.

А. Арифметическое пространство — линейное или, вообще, m-мерное. В линейном случае элементы x суть вещественные числа, и

$$\rho(x, \bar{x}) = |x - \bar{x}|.$$

При $m > 1$ элементы x являются уже упорядоченными системами вещественных чисел: $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, где ξ_i — «координаты» точки x. В этом случае

$$\rho(x, \bar{x}) = \sqrt{(\xi_1 - \bar{\xi}_1)^2 + \ldots + (\xi_m - \bar{\xi}_m)^2},$$

если через $\bar{\xi}_i$ обозначить «координаты» точки $\bar{x}$.

Б. Пространство непрерывных — в промежутке $[a, b]$ — функций $x = x(t)$ с метрикой

$$\rho(x, \bar{x}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - \bar{x}(t)|.$$

В. То же многообразие, но с другой метрикой:

$$\rho(x, \bar{x}) = \sqrt{\int_a^b [x(t) - \bar{x}(t)]^2 \, dt}$$

[ср. n° **418**, замечание].

Г. Пространство последовательностей вещественных чисел

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots),$$

для которых ряд $\sum_1^{\infty} \xi_n^2$ сходится. Метрика:

$$\rho(x, \bar{x}) = \sqrt{\sum_1^{\infty} (\xi_n - \bar{\xi}_n)^2}.$$

Д. Пространство ограниченных последовательностей вещественных чисел с метрикой

$$\rho(x, \bar{x}) = \sup_n |\xi_n - \bar{\xi}_n|.$$

Легко показать, пользуясь «аксиомой треугольника», что — для любого метрического пространства — из сходимости последовательности элементов $\{x_n\}$ к предельному элементу x вытекает выполнение условия, аналогичного известному условию Больцано—Коши [ср. n° 52]:

$$\rho(x_n, x_{n'}) < \varepsilon, \text{ лишь только } n, n' > N_\varepsilon.$$

Обратное заключение — о существовании предельного элемента x для каждой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей этому условию, — верно не для всех метрических пространств. Те пространства, для которых оно верно, называются *полными*; таковы, например, пространства А, Б, Г, Д. В то же время пространство В — не полно *).

Теперь, для того чтобы читателю стала ясной полезность той высокой степени отвлечения и обобщения, которая осуществляется в функциональном анализе, приведем в виде примера одну теорему известного польского математика Стефана Банаха (1892—1945), одного из создателей современного функционального анализа. Она гласит:

Пусть дан функциональный оператор (10), *определенный в полном метрическом пространстве $X = \{x\}$ и переводящий элементы x из X снова в элементы того же пространства. Если при этом всегда*

$$\rho(U(x), U(\bar{x})) \leqslant \alpha \cdot \rho(x, \bar{x}), \text{ где } 0 < \alpha < 1,$$

то существует (и притом единственная) точка x_0 такая, что

$$U(x_0) = x_0. \tag{11}$$

Эта точка называется неподвижной точкой оператора U; она есть не что иное как «корень» *функционального уравнения*

$$x = U(x).$$

Следующее соображение послужит как бы наведением к доказательству. Если x — любая точка, а x_0 — неподвижная точка (предположим,

*) Оно может быть сделано полным, если к нему добавить и все разрывные функции $x(t)$, интегрируемые по Лебегу вместе со своими квадратами. При этом две функции, которые «почти всюду» совпадают, рассматриваются как один элемент пространства.

что она существует!), то

$$\rho(U(x),\ U(x_0)) = \rho(U(x),\ x_0) \leqslant \alpha \cdot \rho(x,\ x_0),$$

так что элемент $x_1 = U(x)$ ближе к x_0, чем x. Естественно повторить этот процесс, исходя из x_1:

$$\rho(U(x_1),\ x_0) \leqslant \alpha \cdot \rho(x_1,\ x_0) \leqslant \alpha^2 \cdot \rho(x,\ x_0),$$

и элемент $x_2 = U(x_1)$ оказывается еще ближе к x_0! Это и подсказывает мысль, исходя из произвольно взятого элемента x, построить, повторно прилагая оператор U, последовательность элементов

$$x_1 = U(x),\quad x_2 = U(x_1),\ \ldots,\ x_n = U(x_{n-1}),\ \ldots \tag{12}$$

Для этой последовательности $\{x_n\}$ доказывается выполнение условия Больцано—Коши, откуда (ввиду полноты пространства) следует, что она сходится к некоторому предельному элементу x_0. Затем устанавливается, что это и есть искомый неподвижный элемент (и притом — единственный). Таков план доказательства, которого в подробностях проводить не будем.

Обращаем лишь внимание читателя на применение, для получения x_0, метода последовательных приближений по схеме (12). Легко получить и оценку n-го приближения:

$$\rho(x_n,\ x_0) \leqslant M\alpha^n \quad (M = \text{const}).$$

Перечислим теперь несколько задач из разных областей, которые сразу получают решение, благодаря использованию установленного «принципа неподвижной точки».

1) Известное в теоретической астрономии «уравнение Кеплера»

$$x = m_0 + \varepsilon \cdot \sin x \tag{13}$$

определяет так называемую эксцентрическую аномалию x планеты по данной ее средней аномалии m_0 и эксцентриситету планетной орбиты ε $(\varepsilon < 1)$.

Пусть «пространство» X есть просто множество всех вещественных чисел (см. A), а «функциональный оператор» есть обыкновенная функция от числовой переменной x:

$$U(x) = m_0 + \varepsilon \cdot \sin x.$$

Ясно, что неподвижная точка x_0 этого «оператора» как раз и есть искомый корень уравнения (13)!

Так как

$$\rho(U(x),\ U(\bar{x})) = |U(x) - U(\bar{x})| = \varepsilon \cdot |\sin x - \sin \bar{x}| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \cdot |x - \bar{x}| = \varepsilon \cdot \rho(x,\ \bar{x}),$$

то условие теоремы выполнено. Таким образом, мы приходим к утверждению о существовании единственного корня x_0 уравнения (13), причем его вычисление может быть выполнено по методу последовательных приближений.

2) Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма второго рода, содержащее произвольный числовой параметр λ:

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt, \tag{14}$$

где $f(s)$ — непрерывна в промежутке $[a,\ b]$, а $K(s,\ t)$ — непрерывна в квадрате $[a,\ b;\ a,\ b]$, и пусть ищется непрерывное же решение $x(s)$ этого уравнения. Пространство X здесь есть пространство непрерывных функций в $[a,\ b]$

с метрикой

$$\rho(x, \bar{x}) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - \bar{x}(t)|$$

(см. Б). Оператор

$$U(x) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt$$

сопоставляет каждой непрерывной функции $x(t)$ тоже некоторую непрерывную функцию от s. И здесь неподвижная точка $x_0(t)$ этого оператора будет, очевидно, решением уравнения (14).

Проверим выполнение условия теоремы. По ограниченности непрерывной функции K:

$$|K(s, t)| \leq M \quad (M = \text{const})$$

будем иметь:

$$\rho(U(x), U(\bar{x})) = |\lambda| \cdot \max_{a \leq s \leq b} \left| \int_a^b K(s, t)[x(t) - \bar{x}(t)]\, dt \right| \leq$$

$$\leq |\lambda| \cdot M \cdot (b - a) \cdot \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - \bar{x}(t)| = |\lambda| \cdot M(b - a) \cdot \rho(x, \bar{x}).$$

Отсюда ясно, что, лишь только

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b - a)},$$

условие теоремы выполнено. Следовательно, для достаточно малых (по абсолютной величине) значений параметра λ уравнение (14) имеет единственное решение $x_0(t)$, которое к тому же может быть получено по способу последовательных приближений.

3) В качестве последнего примера рассмотрим вопрос о решении системы из бесконечного (нумерованного) множества линейных уравнений с бесконечным же (снова — нумерованным) множеством неизвестных; такая система всегда может быть написана в виде:

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \xi_k + b_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{15}$$

где $a_{i,k}$ и b_i — данные коэффициенты, а ξ_i — неизвестные. Предположим, что коэффициенты $a_{i,k}$ и b_i удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leq \alpha < 1, \quad |b_i| \leq \beta \quad (i = 1, 2, 3 \ldots). \tag{16}$$

Нас будет интересовать ограниченное решение системы (15), т. е. такая ограниченная последовательность чисел $\{\xi_i\}$, которая удовлетворяла бы всем уравнениям (15).

Читателю, вероятно, ясно, что в основу здесь надлежит положить пространство X ограниченных последовательностей $x = \{\xi_i\}$ с метрикой

$$\rho(x, \bar{x}) = \sup_i |\xi_i - \bar{\xi}_i|$$

(см. Д). Равенства

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \xi_i + b_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{17}$$

каждому ограниченному набору $x=\{\xi_k\}$ сопоставляют ограниченный же — в силу (16) — набор $y=\{\eta_i\}$, т. е. тоже элемент пространства X; этим и определяется оператор $U(x)$. Если взять еще элемент $\bar{x}=\{\bar{\xi}_k\}$, то соответствующим ему значением $U(\bar{x})$ этого оператора будет элемент $\bar{y}=\{\bar{\eta}_i\}$, определяемый равенствами, аналогичными (17). Так как [по первому из неравенств (16)]

$$\rho(y, \bar{y})=\sup_i\left\{\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}(\xi_k-\bar{\xi}_k)\right|\right\}\leqslant\alpha\cdot\sup_k|\xi_k-\bar{\xi}_k|=\alpha\cdot\rho(x, \bar{x}),$$

то — все по той же теореме — искомое решение существует и единственно. Для получения его также может быть использован метод последовательных приближений.

Весьма поучительна самая возможность решения столь разнородных задач, исходя из одного источника. Этот пример позволит читателю лучше понять, как общие теоремы функционального анализа могут находить приложения в самых разнообразных областях. Сила этого метода, кажущегося столь абстрактным, именно в том, что он исследует объекты и отношения между ними в простейшей форме, отвлекаясь от несущественных для дела их частных особенностей. Как часто и в прошлом прогресс в математике осуществлялся подобным же путем!

Чтобы подчеркнуть значение функционального анализа в целом (мы ведь коснулись лишь его элементов), достаточно упомянуть, что функциональный анализ — в его высоких частях — существенно используется в современной *теоретической физике*, особенно в *квантовой механике*, которая и сама, в свою очередь, несомненно, влияла на развитие функционального анализа.

Итак, *преодолевая не раз ошибки и заблуждения отдельных исследователей и даже поколений, математический анализ вплоть до нашего времени продолжает расти и развиваться, украшаясь все новыми и новыми живыми побегами. Иные новые ветви анализа возникают непосредственно из потребности познания окружающего нас мира, в других же случаях они появляются, подчиняясь естественным законам развития самого анализа, и лишь потом обогащаются приложениями. Различные ветви анализа постепенно проникают одна в другую и, сохраняя специфичность своих задач и методов, все же образуют единое целое!*

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

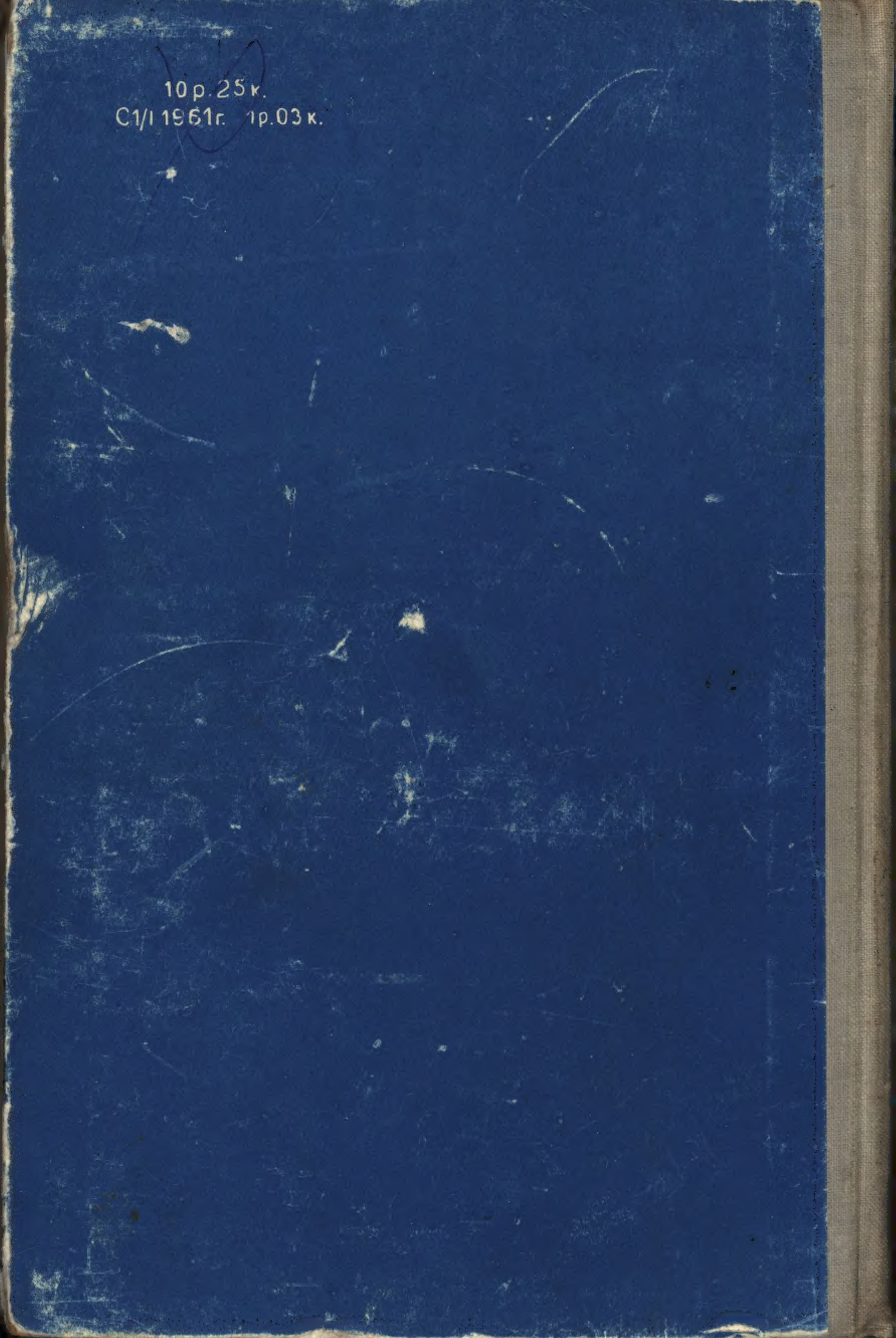
Фихтенгольц Григорий Михайлович
Основы математического анализа, том II

Редактор *Г. П. Акилов*
Техн. редактор *К. М. Волчок* Корректор *А. И. Исакова*

Подписано к печати с матриц 5/V 1960 г. Бумага $60 \times 92/_{16}$. Физ. печ. л. 29. Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 30,79. Тираж 50 000 экз. Цена книги 10 р. 25 к. С 1/I 1961 г. цена 1 р. 03 к. Заказ № 1800.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский пр., 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.
Отпечатано с матриц тип. „Печатный двор" имени А. М. Горького.


10 р. 25 к.
С1/I 1961 г. 1 р. 03 к.